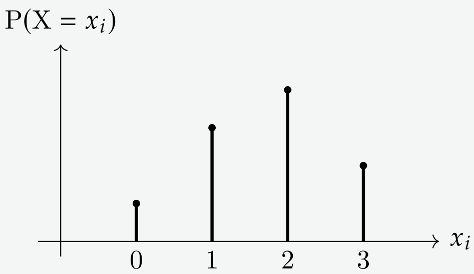
Les variables aléatoires

Une variable aléatoire associe un nombre au résultat d'une expérience du hasard : le gain à un jeu, le nombre de pannes, la durée d'attente. On résume son comportement par trois nombres : l'espérance, qui donne la valeur moyenne attendue sur un grand nombre de répétitions ; la variance et l'écart-type, qui mesurent la dispersion autour de cette moyenne. L'espérance est l'outil de décision : un jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est nulle. La difficulté est de bien construire la loi de probabilité avant tout calcul.

Variable aléatoire et loi de probabilité (1re)

Variable aléatoire : une variable aléatoire X associe un nombre réel à chaque issue de l'expérience.

Loi de probabilité : c'est la donnée de toutes les valeurs x_i prises par X et de leurs probabilités $P(X = x_i)$. On la présente dans un tableau. La somme de toutes les probabilités vaut 1.



Exemple. On lance un dé équilibré et X donne le numéro obtenu. Alors X prend les valeurs 1 à 6, chacune avec la probabilité $\frac{1}{6}$. La somme des probabilités vaut bien $6 \times \frac{1}{6} = 1$.

Espérance (1re)

L'**espérance** de X est la moyenne des valeurs, pondérée par leurs probabilités :

$$E(X) = \sum x_i\, P(X = x_i) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \dots$$

Elle représente la valeur moyenne obtenue si l'on répète l'expérience un très grand nombre de fois.

Exemple. Soit X de loi $P(X = 0) = 0{,}5$, $P(X = 1) = 0{,}3$, $P(X = 2) = 0{,}2$. Alors

$$E(X) = 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}2 = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7.$$

Variance et écart-type (1re)

La **variance** mesure la dispersion des valeurs autour de l'espérance. On la calcule le plus souvent avec la formule

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2,$$

où $E(X^2) = \sum x_i^2\, P(X = x_i)$. L'**écart-type** est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$; il s'exprime dans la même unité que X.

Exemple. Avec la loi précédente, $E(X^2) = 0^2 \times 0{,}5 + 1^2 \times 0{,}3 + 2^2 \times 0{,}2 = 0{,}3 + 0{,}8 = 1{,}1$.
Donc $V(X) = 1{,}1 - 0{,}7^2 = 1{,}1 - 0{,}49 = 0{,}61$ et $\sigma(X) = \sqrt{0{,}61} \approx 0{,}78$.

Transformation affine (1re)

Si a et b sont deux réels, alors $\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b) = a\,\mathrm{E}(\mathrm{X}) + b$ et $\mathrm{V}(a\mathrm{X}+b) = a^2\,\mathrm{V}(\mathrm{X})$. Ajouter une constante décale l'espérance mais ne change pas la dispersion ; multiplier par a multiplie la variance par a^2.

Méthode : calculer espérance, variance, écart-type

1. Dresser le tableau de la loi de probabilité (vérifier que la somme vaut 1).
2. Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum x_i\,\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i)$.
3. Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) = \sum x_i^2\,\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i)$, puis $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - \big(\mathrm{E}(\mathrm{X})\big)^2$ et $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})}$.

Exercice 1 *Loi et espérance* La variable aléatoire X a la loi de probabilité suivante.

x_i	-1	0	2	5
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i)$	$0{,}2$	$0{,}3$	$0{,}4$	$0{,}1$

1. Vérifier que cette loi est bien définie.
2. Calculer l'espérance $\mathrm{E}(\mathrm{X})$.

Exercice 2 *Variance et écart-type* On reprend la variable X de l'exercice précédent ($\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 1{,}1$).

1. Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)$.
2. En déduire $\mathrm{V}(\mathrm{X})$, puis $\sigma(\mathrm{X})$ (arrondir au centième).

Exercice 3 *Synthèse* **(4 points)** Un jeu coûte 3 € la partie. On tire une boule : on gagne 10 € avec une probabilité de $0{,}1$, 5 € avec une probabilité de $0{,}2$, et rien avec une probabilité de $0{,}7$. On note G le gain net (gain obtenu moins le coût de la partie).

1. Donner la loi de probabilité de G.
2. Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{G})$.
3. Le jeu est-il favorable au joueur ? Justifier.

Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Oublier de pondérer par les probabilités	$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \dfrac{x_1+x_2+\dots}{n}$	$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum x_i\,\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i)$
Calculer $\big(\mathrm{E}(\mathrm{X})\big)^2$ au lieu de $\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)$	$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X})^2 - \mathrm{E}(\mathrm{X}^2)$	$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - \big(\mathrm{E}(\mathrm{X})\big)^2$
Confondre variance et écart-type	$\sigma(\mathrm{X}) = \mathrm{V}(\mathrm{X})$	$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})}$
Oublier le coût dans un jeu	$\mathrm{E}(\text{gain}) = \mathrm{E}(\text{tirage})$	retrancher la mise : gain net

SOLUTIONS DES EXERCICES

Corrigé de l'exercice 1.

1. La somme des probabilités est $0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}1 = 1$: la loi est bien définie.
2. $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = (-1) \times 0{,}2 + 0 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}4 + 5 \times 0{,}1 = -0{,}2 + 0{,}8 + 0{,}5 = 1{,}1$.

Corrigé de l'exercice 2.

1. $\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) = (-1)^2 \times 0{,}2 + 0^2 \times 0{,}3 + 2^2 \times 0{,}4 + 5^2 \times 0{,}1 = 0{,}2 + 1{,}6 + 2{,}5 = 4{,}3$.
2. $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - \big(\mathrm{E}(\mathrm{X})\big)^2 = 4{,}3 - 1{,}1^2 = 4{,}3 - 1{,}21 = 3{,}09$, donc $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{3{,}09} \approx 1{,}76$.

Corrigé de l'exercice 3.

1. Le gain net vaut $10 - 3 = 7$ (probabilité $0{,}1$), $5 - 3 = 2$ (probabilité $0{,}2$) ou $0 - 3 = -3$ (probabilité $0{,}7$).
2. $\mathrm{E}(\mathrm{G}) = 7 \times 0{,}1 + 2 \times 0{,}2 + (-3) \times 0{,}7 = 0{,}7 + 0{,}4 - 2{,}1 = -1$.
3. L'espérance de gain est -1 € : en moyenne, le joueur perd 1 € par partie. Le jeu n'est **pas** favorable au joueur (il serait équitable si l'espérance était nulle).