La trigonométrie

La trigonométrie dans le triangle rectangle relie les angles aigus aux rapports de longueurs des côtés. Elle permet de calculer une longueur à partir d'un angle, ou un angle à partir de longueurs. L'une des difficultés les plus fréquentes est la confusion entre côté opposé et côté adjacent : les élèves appliquent sin, cos ou tan sans savoir quel rapport choisir ni pourquoi il est constant.

Trigonométrie dans le triangle rectangle (3^e–2^{de})

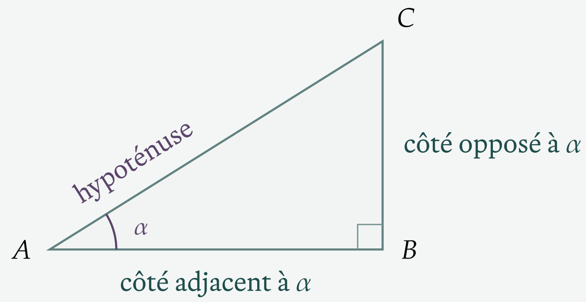
Dans un triangle rectangle, quand on fixe un **angle aigu**, chaque côté porte un nom par rapport à cet angle :
Hypoténuse : le côté opposé à l'angle droit (toujours le plus long).
Côté opposé : le côté qui est en face de l'angle aigu choisi.
Côté adjacent : le côté qui touche l'angle aigu choisi (et qui n'est pas l'hypoténuse).

Les trois rapports trigonométriques sont :

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent à } \alpha}{\text{hypoténuse}} \qquad \sin(\alpha) = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{hypoténuse}} \qquad \tan(\alpha) = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{côté adjacent à } \alpha}$$

Valeurs possibles : pour un angle aigu dans un triangle rectangle, le sinus et le cosinus sont toujours compris strictement entre 0 et 1 (car le côté opposé et le côté adjacent sont toujours plus courts que l'hypoténuse). La tangente, en revanche, peut dépasser 1 : c'est le cas dès que le côté opposé est plus long que le côté adjacent.

Pourquoi ces rapports sont-ils toujours les mêmes pour un angle donné ? Tous les triangles rectangles ayant un même angle aigu sont semblables (ils ont la même forme). Les rapports entre les côtés ne dépendent donc pas de la taille du triangle, mais uniquement de l'angle.



Exemples Dans un triangle ABC rectangle en C, par rapport à l'angle $\widehat{A}$:

- l'hypoténuse est le côté $[AB]$ (opposé à l'angle droit) ;
- le côté adjacent à $\widehat{A}$ est $[AC]$ (il touche l'angle $\widehat{A}$) ;
- le côté opposé à $\widehat{A}$ est $[BC]$ (il est en face de l'angle $\widehat{A}$).

Donc : $\cos(\widehat{A}) = \dfrac{AC}{AB}$, $\sin(\widehat{A}) = \dfrac{BC}{AB}$, $\tan(\widehat{A}) = \dfrac{BC}{AC}$.

Valeurs remarquables (3^e–2de)

Certains angles donnent des valeurs exactes qu'il est utile de connaître :

Angle α	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

Astuce de vérification : $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ pour tout angle α. Cette relation, conséquence directe du théorème de Pythagore, permet de vérifier la cohérence de ses calculs.

Choisir le bon rapport trigonométrique (3^e–2de)

Méthode en trois étapes :

1. Identifier l'angle aigu concerné.
2. Nommer les côtés par rapport à cet angle : hypoténuse, opposé, adjacent.
3. Repérer quels côtés interviennent dans le problème (un connu, un cherché). Le rapport qui utilise exactement ces deux côtés est celui qu'il faut choisir.

Côtés en jeu	**Rapport**	**Formule**
Côté adjacent à α et hypoténuse	Cosinus	$\cos(\alpha) = \dfrac{\text{côté adjacent à } \alpha}{\text{hypoténuse}}$
Côté opposé à α et hypoténuse	Sinus	$\sin(\alpha) = \dfrac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{hypoténuse}}$
Côté opposé à α et côté adjacent à α	Tangente	$\tan(\alpha) = \dfrac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{côté adjacent à } \alpha}$

Moyen mnémotechnique : ***SOH-CAH-TOA****. S = Sin = côté Opposé à l'angle / Hypoténuse ; C = Cos = côté Adjacent à l'angle / Hypoténuse ; T = Tan = côté Opposé à l'angle / côté Adjacent à l'angle.*

Exercice 1 *Calculer une longueur avec la trigonométrie (3^e)*

1. Le triangle ABC est rectangle en C, avec $\widehat{A} = 35°$ et $AB = 10$ cm. Calculer BC.
2. Le triangle DEF est rectangle en F, avec $\widehat{D} = 50°$ et $DF = 7$ cm. Calculer EF.
3. Le triangle MNP est rectangle en N, avec $\widehat{P} = 28°$ et $MP = 15$ cm. Calculer MN.

Exercice 2 *Calculer un angle (3^e–2^{de})*

1. Le triangle ABC est rectangle en C, avec $AC = 8$ cm et $AB = 12$ cm. Calculer $\widehat{A}$ au degré près.
2. Le triangle RST est rectangle en S, avec $RS = 5$ cm et $ST = 9$ cm. Calculer $\widehat{R}$ au degré près.
3. Vérifier que la somme des angles du triangle ABC de la question 1 vaut bien $180°$.

Exercice 3 *Problème en contexte (3^e–2^{de})* Un randonneur se trouve au pied d'une falaise. Pour estimer la hauteur de la falaise, il recule de 50 m et mesure l'angle d'élévation vers le sommet : il trouve $32°$. Ses yeux sont à $1{,}70$ m du sol.

1. Faire un schéma en plaçant le point A (les yeux du randonneur), le point B (le pied de la falaise au niveau des yeux) et le point S (le sommet de la falaise).
2. Quel triangle rectangle se forme ? Identifier l'angle de $32°$ et les côtés.
3. Calculer la hauteur BS au dixième de mètre près.
4. En déduire la hauteur totale de la falaise.

Exercice 4 *Synthèse (3^e–2^{de})* Le triangle ABC est rectangle en B, avec $AB = 6$ cm et $\widehat{A} = 40°$.

1. Identifier l'hypoténuse du triangle ABC. Justifier.
2. En utilisant la trigonométrie, calculer la longueur AC arrondie au dixième de centimètre.
3. En utilisant la trigonométrie, calculer la longueur BC arrondie au dixième de centimètre.
4. Vérifier le résultat en appliquant le théorème de Pythagore : calculer $AB^2 + BC^2$ et comparer avec AC^2.
5. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{C}$ de deux façons différentes.

Erreurs classiques en trigonométrie

Erreur	Exemple faux	Correction
Confondre opposé et adjacent	Écrire $\cos(\alpha) = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{hypoténuse}}$	$\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent à } \alpha}{\text{hypoténuse}}$; se rappeler **CAH**
Calculatrice en radians	Trouver $\sin(30°) = -0{,}988$	Vérifier que la calculatrice est en mode **degrés** (DEG)
Appliquer à un triangle non rectangle	Utiliser SOH-CAH-TOA dans un triangle quelconque	Les formules ne s'appliquent que dans un triangle **rectangle**
Confondre $\sin$ et $\arcsin$	Écrire $\alpha = \sin\left(\frac{3}{5}\right)$	Si $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$, alors $\alpha = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$
Croire que $\sin(\alpha) > 1$ est possible	Obtenir $\sin(\alpha) = 1{,}3$ et ne pas détecter l'erreur	Le sinus et le cosinus d'un angle aigu sont toujours compris entre 0 et 1 : un résultat > 1 signale une erreur

Exercice 5 *QCM (3^e–2^{de})* Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. Dans un triangle ABC rectangle en A, $\cos(\widehat{B})$ est égal à :

   A. $\dfrac{AB}{BC}$ **B.** $\dfrac{AC}{BC}$ **C.** $\dfrac{AB}{AC}$ **D.** $\dfrac{BC}{AB}$

2. $\sin(30°)$ vaut :

   A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** 1

3. Dans un triangle rectangle, si l'on connaît un angle aigu et le côté opposé, et que l'on cherche l'hypoténuse, on utilise :

   A. le cosinus **B.** la tangente **C.** le sinus **D.** Pythagore

4. Le triangle RST est rectangle en T, avec $RS = 10$ cm et $\widehat{R} = 60°$. La longueur ST vaut :

   A. $10 \times \cos(60°)$ **B.** $10 \times \sin(60°)$ **C.** $10 \times \tan(60°)$ **D.** $\dfrac{10}{\sin(60°)}$

5. Si $\cos(\alpha) = 0{,}6$ et $\sin(\alpha) = 0{,}8$, alors $\tan(\alpha)$ vaut :

   A. $0{,}48$ **B.** $1{,}4$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** $0{,}75$

Exercice 6 ***Vrai ou faux ?*** Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. $\sin(\alpha)$ peut valoir $1{,}5$ pour un certain angle aigu α.
B. Dans un triangle rectangle, $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ pour tout angle aigu α.
C. $\cos(60°) = \sin(30°)$.
D. La tangente d'un angle aigu peut être supérieure à 1.
E. Si $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$, alors $\alpha = \beta$.
F. Le cosinus d'un angle augmente quand l'angle augmente (entre $0°$ et $90°$).

Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche ***Que faire quand je bloque ?***
Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche ***Mémorisation et sciences cognitives****.*
Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton ***Carnet d'erreurs****.*

SOLUTIONS DES EXERCICES

Corrigé de l'exercice 1.

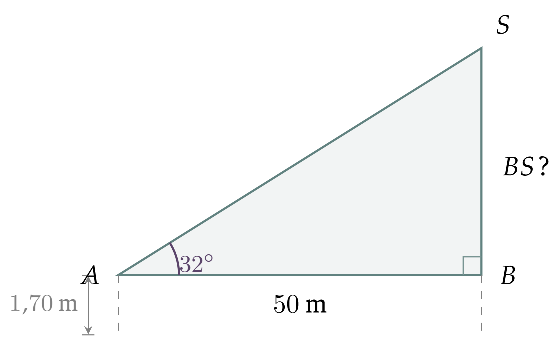
1. On cherche la longueur BC (côté opposé à $\widehat{A}$) et on connaît AB (hypoténuse). Le rapport qui utilise le côté opposé et l'hypoténuse est le sinus.
   $\sin(\widehat{A}) = \dfrac{BC}{AB}$, donc $BC = AB \times \sin(35°) = 10 \times \sin(35°)$.
   $BC = 10 \times 0{,}5736 \approx 5{,}74$ cm.
2. On cherche la longueur EF (côté opposé à $\widehat{D}$) et on connaît DF (côté adjacent à $\widehat{D}$). Le rapport qui utilise le côté opposé et le côté adjacent est la tangente.
   $\tan(\widehat{D}) = \dfrac{EF}{DF}$, donc $EF = DF \times \tan(50°) = 7 \times \tan(50°)$.
   $EF = 7 \times 1{,}1918 \approx 8{,}34$ cm.
3. On cherche la longueur MN (côté adjacent à $\widehat{P}$) et on connaît MP (hypoténuse). Le rapport qui utilise le côté adjacent et l'hypoténuse est le cosinus.
   $\cos(\widehat{P}) = \dfrac{MN}{MP}$, donc $MN = MP \times \cos(28°) = 15 \times \cos(28°)$.
   $MN = 15 \times 0{,}8829 \approx 13{,}24$ cm.

Corrigé de l'exercice 2.

1. On connaît la longueur AC (côté adjacent à $\widehat{A}$) et AB (hypoténuse) : on utilise le cosinus.
   $\cos(\widehat{A}) = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} \approx 0{,}6667$.
   $\widehat{A} = \arccos\left(\dfrac{2}{3}\right) \approx 48°$.
2. On connaît les longueurs RS (côté adjacent à $\widehat{R}$) et ST (côté opposé à $\widehat{R}$) : on utilise la tangente.
   $\tan(\widehat{R}) = \dfrac{ST}{RS} = \dfrac{9}{5} = 1{,}8$.
   $\widehat{R} = \arctan(1{,}8) \approx 61°$.
3. Le triangle ABC est rectangle en C, donc $\widehat{C} = 90°$.
   On a trouvé $\widehat{A} \approx 48°$.
   $\widehat{B} = 180° - 90° - 48° = 42°$.
   Vérification : $90° + 48° + 42° = 180°$. ✓

Corrigé de l'exercice 3.

1. Le schéma montre un triangle ABS rectangle en B, avec A les yeux du randonneur, B le point de la falaise à la hauteur des yeux et S le sommet de la falaise.



2. Le triangle ABS est rectangle en B. L'angle $\widehat{A} = 32°$. Le côté $[AB]$, de longueur $AB = 50$ m, est le côté adjacent à $\widehat{A}$ et le côté $[BS]$ est le côté opposé à $\widehat{A}$.

3. On connaît le côté adjacent et on cherche le côté opposé : on utilise la tangente.
   $\tan(32°) = \dfrac{BS}{AB} = \dfrac{BS}{50}$, donc $BS = 50 \times \tan(32°) = 50 \times 0{,}6249 \approx 31{,}2$ m.
4. La hauteur totale de la falaise est $BS + 1{,}70 = 31{,}2 + 1{,}7 = 32{,}9$ m (on ajoute la hauteur des yeux du randonneur).

Corrigé de l'exercice 4.

1. Le triangle est rectangle en B : l'hypoténuse est le côté $[AC]$, opposé à l'angle droit.
2. On connaît la longueur AB (côté adjacent à $\widehat{A}$) et on cherche AC (hypoténuse). Le rapport qui utilise le côté adjacent et l'hypoténuse est le cosinus.
   $\cos(\widehat{A}) = \dfrac{AB}{AC}$, donc $AC = \dfrac{AB}{\cos(40°)} = \dfrac{6}{\cos(40°)}$.
   $AC = \dfrac{6}{0{,}7660} \approx 7{,}8$ cm.
3. On connaît la longueur AB (côté adjacent à $\widehat{A}$) et on cherche BC (côté opposé à $\widehat{A}$). Le rapport qui utilise le côté opposé et le côté adjacent est la tangente.
   $\tan(\widehat{A}) = \dfrac{BC}{AB}$, donc $BC = AB \times \tan(40°) = 6 \times \tan(40°)$.
   $BC = 6 \times 0{,}8391 \approx 5{,}0$ cm.
4. Vérification par Pythagore : $AB^2 + BC^2 = 6^2 + 5{,}0^2 = 36 + 25{,}0 = 61{,}0$.
   $AC^2 = 7{,}8^2 = 60{,}8$.
   Les deux valeurs sont très proches $(61{,}0 \approx 60{,}8)$: le léger écart vient des arrondis. Le résultat est cohérent.
5. **Première façon :** par la somme des angles d'un triangle : $\widehat{C} = 180° - 90° - 40° = 50°$.
   Deuxième façon : par la trigonométrie. On connaît les longueurs AB et AC, donc :
   $\sin(\widehat{C}) = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{6}{7{,}8} \approx 0{,}7692$.
   $\widehat{C} = \arcsin(0{,}7692) \approx 50°$.
   Les deux méthodes donnent le même résultat, ce qui confirme la cohérence des calculs.

Corrigé de l'exercice 5.

1. **Réponse A.** Le triangle est rectangle en A. Par rapport à l'angle $\widehat{B}$: l'hypoténuse est le côté $[BC]$, le côté adjacent à $\widehat{B}$ est $[AB]$, le côté opposé à $\widehat{B}$ est $[AC]$. Donc $\cos(\widehat{B}) = \dfrac{\text{côté adjacent à } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AB}{BC}$.
   - B : c'est $\sin(\widehat{B})$, pas le cosinus (confusion opposé/adjacent).
   - C : ce rapport $(\frac{AB}{AC})$ n'est ni le sinus, ni le cosinus, ni la tangente de $\widehat{B}$.
   - D : c'est l'inverse du cosinus, pas le cosinus.
2. **Réponse B.** $\sin(30°) = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$. C'est une valeur remarquable à connaître.
   - A $(\frac{\sqrt{3}}{2})$: c'est $\cos(30°)$ ou $\sin(60°)$.
   - C $(\frac{\sqrt{2}}{2})$: c'est $\sin(45°)$ ou $\cos(45°)$.
   - D (1) : c'est $\sin(90°)$.
3. **Réponse C.** On connaît le côté opposé à l'angle et on cherche l'hypoténuse : le rapport côté opposé / hypoténuse est le sinus. $\sin(\alpha) = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{hypoténuse}}$, donc hypoténuse $= \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\sin(\alpha)}$.
   - A : le cosinus utilise côté adjacent / hypoténuse, pas côté opposé.
   - B : la tangente utilise côté opposé / côté adjacent, l'hypoténuse n'intervient pas.
   - D : Pythagore relie les trois côtés, pas un angle et des côtés.

4. **Réponse B.** Le triangle est rectangle en T, donc $[RS]$ est l'hypoténuse. ST est le côté opposé à $\widehat{R}$, donc $\sin(\widehat{R}) = \frac{ST}{RS}$, d'où $ST = RS \times \sin(60°) = 10 \times \sin(60°)$.
   - A : $10 \times \cos(60°)$ donne RT (le côté adjacent), pas ST.
   - C : la tangente utilise le rapport opposé/adjacent, pas opposé/hypoténuse.
   - D : cette formule donnerait une valeur supérieure à 10, ce qui est impossible pour un côté non-hypoténuse.
5. **Réponse C.** $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{0{,}8}{0{,}6} = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}333$.
   - A ($0{,}48$) : produit $0{,}6 \times 0{,}8$ au lieu du quotient.
   - B ($1{,}4$) : somme $0{,}6 + 0{,}8$ au lieu du quotient.
   - D ($0{,}75$) : quotient inversé $\frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$ (confusion numérateur/dénominateur).

Corrigé de l'exercice 6.

A. **Faux.** Le sinus d'un angle aigu est le rapport $\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$. Comme l'hypoténuse est toujours le plus long côté, ce rapport est toujours compris entre 0 et 1.

B. **Vrai.** C'est une conséquence directe du théorème de Pythagore. Si le triangle est rectangle et que l'hypoténuse vaut c, alors $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ et $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$. Donc $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$.

C. **Vrai.** $\cos(60°) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(30°) = \dfrac{1}{2}$. Plus généralement, $\cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha)$: le cosinus d'un angle est le sinus de son complémentaire.

D. **Vrai.** La tangente est le rapport $\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$. Si le côté opposé est plus long que le côté adjacent, ce rapport dépasse 1. Par exemple, $\tan(60°) = \sqrt{3} \approx 1{,}732$.

E. **Vrai** (pour des angles aigus). La fonction sinus est strictement croissante sur $[0° ; 90°]$: deux angles aigus distincts ne peuvent pas avoir le même sinus.

F. **Faux.** Le cosinus **diminue** quand l'angle augmente entre $0°$ et $90°$: $\cos(0°) = 1$, $\cos(45°) \approx 0{,}707$, $\cos(90°) = 0$. C'est le sinus qui augmente.