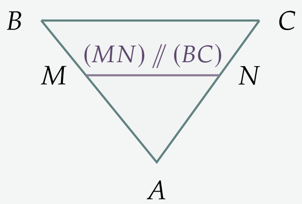
Le théorème de Thalès

Le théorème de Thalès permet de calculer des longueurs dans une configuration de droites parallèles coupées par deux sécantes. Sa réciproque (et sa contraposée) sert à prouver que deux droites sont parallèles ou ne le sont pas. L'une des difficultés les plus fréquentes est la mauvaise identification de la configuration : les élèves mélangent les rapports ou comparent des longueurs qui ne sont pas du même côté de la sécante.

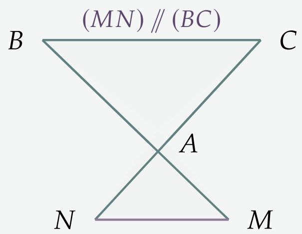
La configuration de Thalès (3^e)

On dit qu'on est dans une **configuration de Thalès** lorsque deux droites sécantes coupent deux droites parallèles.

Il existe deux configurations classiques :



Configuration « triangle »



Configuration « papillon »

Dans les deux cas, le point A est le sommet commun aux deux sécantes, et $(MN) \mathbin{/\!/} (BC)$.

Le théorème de Thalès (3^e)

Si $(MN) \mathbin{/\!/} (BC)$ dans une configuration de Thalès de sommet A, alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Lecture des rapports : chaque rapport compare deux longueurs **sur la même droite** (la même sécante), en partant toujours du sommet A.

Exemples

- Configuration « triangle » : A, M, B sont alignés et A, N, C sont alignés, avec $(MN) \mathbin{/\!/} (BC)$. Si $AM = 3$ cm, $AB = 5$ cm et $AN = 4{,}2$ cm, alors :
  $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$, donc $\dfrac{AN}{AC} = 0{,}6$, d'où $AC = \dfrac{AN}{0{,}6} = \dfrac{4{,}2}{0{,}6} = 7$ cm.
- Configuration « papillon » : M, A, B sont alignés (dans cet ordre) et N, A, C sont alignés, avec $(MN) \mathbin{/\!/} (BC)$. Si $AM = 2$ cm, $AB = 6$ cm et $BC = 9$ cm, alors :
  $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$, donc $MN = BC \times \dfrac{1}{3} = 9 \times \dfrac{1}{3} = 3$ cm.

Exercice 1 ***Calculer une longueur (3^e)*** Dans chaque cas, les droites (MN) et (BC) sont parallèles. Calculer la longueur demandée.

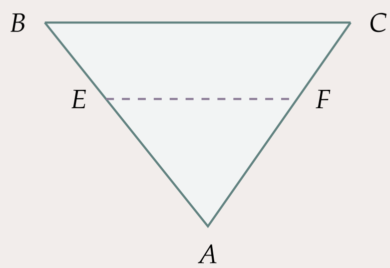
1. Configuration « triangle » : $AM = 4$ cm, $AB = 10$ cm, $AN = 3$ cm. Calculer AC.
2. Configuration « triangle » : $AM = 6$ cm, $AB = 9$ cm, $BC = 12$ cm. Calculer MN.
3. Configuration « papillon » : $AM = 3$ cm, $AB = 7{,}5$ cm, $AN = 2$ cm. Calculer AC.

Méthode de rédaction (3e)

Pour rédiger correctement un exercice de Thalès, on suit toujours les mêmes étapes :

1. **Identifier la configuration :** nommer le sommet A, les deux sécantes, les deux droites parallèles.
2. **Citer le théorème :** « Les points A, M, B sont alignés et les points A, N, C sont alignés. Comme $(MN) /\!/ (BC)$, d'après le théorème de Thalès : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$. »
3. **Remplacer par les valeurs connues :** ne garder que les deux rapports utiles.
4. **Calculer :** par produit en croix ou en identifiant le coefficient de proportionnalité.
5. **Conclure :** donner la valeur exacte ou arrondie selon la consigne.

Exercice 2 *Rédiger complètement (3e)* Sur la figure ci-dessous, les droites (EF) et (BC) sont parallèles. On donne $AB = 8$ cm, $AE = 5$ cm, $AC = 12$ cm et $EF = 7{,}5$ cm.



1. Calculer AF.
2. Calculer BC.

Réciproque et contraposée (3e)

Réciproque : si A, M, B et A, N, C sont alignés (dans le même ordre) et si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, alors $(MN) /\!/ (BC)$.

*Elle sert à prouver que deux droites **sont** parallèles.*

Contraposée : si A, M, B et A, N, C sont alignés et si $\dfrac{AM}{AB} \neq \dfrac{AN}{AC}$, alors (MN) n'est **pas** parallèle à (BC).

*Elle sert à prouver que deux droites **ne sont pas** parallèles.*

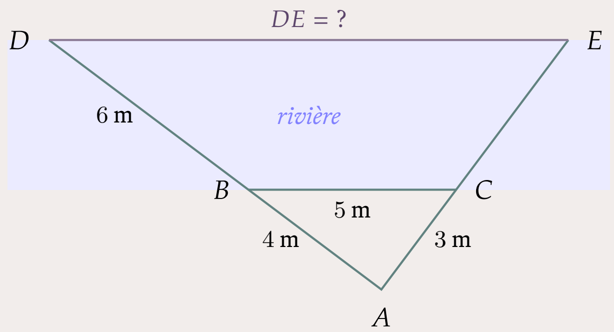
Attention : pour la réciproque, il faut impérativement vérifier que les points sont alignés dans le **même ordre** sur les deux sécantes (A, M, B et A, N, C, ou M, A, B et N, A, C). Si ce n'est pas le cas, la conclusion est fausse.

Exercice 3 *Réciproque et contraposée (3e)*

1. Les points A, M, B sont alignés dans cet ordre, ainsi que les points A, N, C. On donne $AM = 4$ cm, $MB = 6$ cm, $AN = 3$ cm, $NC = 4{,}5$ cm. Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

2. Les points A, E, B sont alignés dans cet ordre, ainsi que les points A, F, C. On donne $AE = 3$ cm, $EB = 5$ cm, $AF = 4$ cm, $FC = 7$ cm. Les droites (EF) et (BC) sont-elles parallèles ?

Exercice 4 ***Problème en contexte (3ᵉ)*** Pour mesurer la largeur d'une rivière sans la traverser, on plante des piquets. On obtient la configuration suivante, où $(BC) \parallel (DE)$:



On donne $AB = 4$ m, $AC = 3$ m, $BD = 6$ m et $BC = 5$ m.

1. Calculer AD.
2. En appliquant le théorème de Thalès, calculer AE puis DE.

Erreurs classiques sur le théorème de Thalès

Erreur	Exemple faux	Correction
Mélanger les sécantes	Écrire $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$	Chaque rapport compare deux longueurs **sur la même sécante** : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$
Oublier de vérifier le parallélisme	Appliquer Thalès sans vérifier que $(MN) \parallel (BC)$	Le théorème nécessite la condition de parallélisme. Sans elle, les rapports ne sont pas forcément égaux
Confondre AM et MB dans les rapports	Écrire $\frac{MB}{AB} = \frac{MN}{BC}$	Le rapport correct est $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ (toujours en partant du sommet A)
Oublier l'alignement dans la réciproque	Conclure au parallélisme sans vérifier l'ordre des points	Il faut que les points soient alignés dans le même ordre sur les deux sécantes
Mauvais produit en croix	Écrire $\frac{4}{10} = \frac{x}{3}$ et conclure $x = \frac{10 \times 3}{4}$	Le produit en croix correct donne $x = \frac{4 \times 3}{10} = 1{,}2$

Exercice 5 ***QCM (3ᵉ)*** Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. Dans une configuration de Thalès de sommet A avec $(MN) /\!/ (BC)$, $AM = 3$, $AB = 9$ et $BC = 12$. La longueur MN vaut :

   A. 36 **B.** 4 **C.** 6 **D.** $\frac{9}{4}$

2. Mêmes données. La longueur MB vaut :

   A. 6 **B.** 3 **C.** 12 **D.** $\frac{1}{3}$

3. Pour prouver que $(MN) /\!/ (BC)$, on utilise :

   A. le théorème de Thalès **B.** la réciproque de Thalès **C.** le théorème de Pythagore

4. On a $\frac{AE}{AB} = \frac{3}{8}$ et $\frac{AF}{AC} = \frac{3}{7}$. Les droites (EF) et (BC) sont :

   A. parallèles **B.** non parallèles **C.** on ne peut pas conclure

Exercice 6 ***Vrai ou faux ?*** Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Le théorème de Thalès ne s'applique qu'aux triangles rectangles.

B. Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors $(MN) /\!/ (BC)$.

C. Dans une configuration de Thalès, si le rapport vaut $\frac{1}{2}$, alors M est le milieu de $[AB]$.

D. On peut utiliser le théorème de Thalès même si les droites ne sont pas parallèles.

E. Le théorème de Thalès permet de prouver que deux droites sont parallèles.

F. Si $(MN) /\!/ (BC)$ dans une configuration de Thalès, alors $MN < BC$ si M est entre A et B.

Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche ***Que faire quand je bloque ?***
Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche ***Mémorisation et sciences cognitives****.*
Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton ***Carnet d'erreurs****.*

SOLUTIONS DES EXERCICES

Corrigé de l'exercice 1.

1. D'après le théorème de Thalès (car $(MN) \parallel (BC)$) :
   $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, soit $\dfrac{4}{10} = \dfrac{3}{AC}$.
   En effectuant un produit en croix : $AC = \dfrac{3 \times 10}{4} = \dfrac{30}{4} = 7{,}5$ cm.
2. D'après le théorème de Thalès :
   $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC}$, soit $\dfrac{6}{9} = \dfrac{MN}{12}$.
   $MN = \dfrac{6 \times 12}{9} = \dfrac{72}{9} = 8$ cm.
3. Configuration « papillon » : M, A, B alignés et N, A, C alignés. D'après le théorème de Thalès :
   $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, soit $\dfrac{3}{7{,}5} = \dfrac{2}{AC}$.
   $AC = \dfrac{2 \times 7{,}5}{3} = \dfrac{15}{3} = 5$ cm.

Corrigé de l'exercice 2.

1. Les points A, E, B sont alignés et les points A, F, C sont alignés. Comme $(EF) \parallel (BC)$, d'après le théorème de Thalès :
   $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC}$.
   On utilise : $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$, soit $\dfrac{5}{8} = \dfrac{AF}{12}$.
   $AF = \dfrac{5 \times 12}{8} = \dfrac{60}{8} = 7{,}5$ cm.
2. On utilise : $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{EF}{BC}$, soit $\dfrac{5}{8} = \dfrac{7{,}5}{BC}$.
   $BC = \dfrac{7{,}5 \times 8}{5} = \dfrac{60}{5} = 12$ cm.

Corrigé de l'exercice 3.

1. Calculons $AB = AM + MB = 4 + 6 = 10$ cm et $AC = AN + NC = 3 + 4{,}5 = 7{,}5$ cm.
   $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$ et $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{3}{7{,}5} = 0{,}4$.
   Les rapports sont égaux et les points sont alignés dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
2. Calculons $AB = AE + EB = 3 + 5 = 8$ cm et $AC = AF + FC = 4 + 7 = 11$ cm.
   $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$ et $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{4}{11} \approx 0{,}364$.
   Les rapports ne sont pas égaux ($0{,}375 \neq 0{,}364$). D'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (EF) et (BC) ne sont pas parallèles.

Corrigé de l'exercice 4.

1. Les points A, B, D sont alignés dans cet ordre. Donc $AD = AB + BD = 4 + 6 = 10$ m.
2. Les points A, B, D sont alignés et les points A, C, E sont alignés. Comme $(BC) \parallel (DE)$, d'après le théorème de Thalès :
   $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{BC}{DE}$.
   $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$.

Pour AE : $\dfrac{AC}{AE} = 0{,}4$, donc $AE = \dfrac{3}{0{,}4} = 7{,}5$ m.
Pour DE : $\dfrac{BC}{DE} = 0{,}4$, donc $DE = \dfrac{5}{0{,}4} = 12{,}5$ m.

Corrigé de l'exercice 5.

1. **Réponse B.** $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC}$, soit $\dfrac{3}{9} = \dfrac{MN}{12}$. Donc $MN = \dfrac{3 \times 12}{9} = 4$.
   - A (36) : produit $3 \times 12 = 36$ sans diviser par 9.
   - C (6) : confusion avec un autre rapport ou une division erronée.
   - D ($\frac{9}{4}$) : inversion du produit en croix.
2. **Réponse A.** $MB = AB - AM = 9 - 3 = 6$.
   - B (3) : confusion entre AM et MB.
   - C (12) : confusion avec BC.
   - D ($\frac{1}{3}$) : confusion avec le rapport $\frac{AM}{AB}$.
3. **Réponse B.** Le théorème de Thalès sert à calculer des longueurs (sens direct). Pour prouver un parallélisme, on utilise la **réciproque** du théorème de Thalès.
   - A : le théorème direct part du parallélisme pour en déduire des rapports.
   - C : Pythagore concerne les longueurs dans un triangle rectangle, pas le parallélisme.
4. **Réponse B.** $\dfrac{3}{8} = 0{,}375$ et $\dfrac{3}{7} \approx 0{,}429$. Les rapports sont différents : d'après la contraposée du théorème de Thalès, (EF) et (BC) ne sont pas parallèles.
   - A : piège si l'on compare seulement les numérateurs ($3 = 3$) sans comparer les rapports complets.
   - C : on peut conclure car on a toutes les informations nécessaires.

Corrigé de l'exercice 6.

A. Faux. Le théorème de Thalès s'applique à des **droites parallèles coupées par deux sécantes**. Il n'a aucun lien avec les triangles rectangles (c'est Pythagore qui concerne les triangles rectangles).

B. Vrai (sous réserve que les points soient alignés dans le bon ordre). C'est la réciproque du théorème de Thalès. Il faut vérifier que A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre.

C. Vrai. Si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{2}$, alors $AM = \dfrac{AB}{2}$, ce qui signifie que M est bien le milieu de $[AB]$.

D. Faux. Le parallélisme est une condition indispensable du théorème. Sans elle, les rapports ne sont pas nécessairement égaux.

E. Faux. Le théorème de Thalès (sens direct) sert à calculer des longueurs. C'est la **réciproque** qui sert à prouver le parallélisme.

F. Vrai. Si M est entre A et B, alors $\dfrac{AM}{AB} < 1$. Comme $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB} < 1$, on a bien $MN < BC$. Le segment $[MN]$ est un « rétrécissement » de $[BC]$.