

# Les suites numériques

Une suite est une liste ordonnée de nombres : un premier terme, un deuxième, un troisième, et ainsi de suite. On la note  $(u_n)$ , et  $u_n$  désigne le terme de rang  $n$ . Les suites servent à modéliser tout ce qui évolue par étapes : un capital qui rapporte des intérêts chaque année, une population qui croît, un médicament qui s'élimine. Deux familles reviennent sans cesse : les suites arithmétiques (on ajoute toujours le même nombre) et les suites géométriques (on multiplie toujours par le même nombre). La difficulté est de ne pas les confondre.

## Vocabulaire et génération (1<sup>re</sup>)

**Suite :** une suite  $(u_n)$  associe à chaque entier  $n$  un nombre  $u_n$ , appelé terme de rang  $n$ . Le premier terme est souvent  $u_0$  (parfois  $u_1$ ).

**Génération explicite :**  $u_n$  est donné directement en fonction de  $n$ , par une formule  $u_n = f(n)$ . On calcule n'importe quel terme sans connaître les précédents.

**Génération par récurrence :** on donne le premier terme et une relation  $u_{n+1} = f(u_n)$  qui passe d'un terme au suivant. Il faut calculer les termes de proche en proche.

**Exemples** **A.** Suite explicite  $u_n = n^2 - 1$  :  $u_0 = -1, u_1 = 0, u_2 = 3, u_3 = 8$ . On a calculé  $u_3$  directement avec  $3^2 - 1$ .  
**B.** Suite par récurrence  $v_0 = 2$  et  $v_{n+1} = 3v_n - 1$  :  $v_1 = 3 \times 2 - 1 = 5, v_2 = 3 \times 5 - 1 = 14, v_3 = 3 \times 14 - 1 = 41$ . Ici, il faut  $v_2$  pour obtenir  $v_3$ .

## Suites arithmétiques (1<sup>re</sup>)

Une suite est **arithmétique** lorsqu'on passe d'un terme au suivant en **ajoutant toujours le même nombre**  $r$ , appelé raison :  $u_{n+1} = u_n + r$ .

**Terme général :**  $u_n = u_0 + n r$  (à partir de  $u_0$ ).

**Sens de variation :** si  $r > 0$ , la suite est croissante ; si  $r < 0$ , elle est décroissante ; si  $r = 0$ , elle est constante.

**Exemple.** Suite arithmétique de premier terme  $u_0 = 5$  et de raison  $r = 3$ . Alors  $u_n = 5 + 3n$ , donc  $u_{10} = 5 + 3 \times 10 = 35$ . Comme  $r = 3 > 0$ , la suite est croissante.

## Suites géométriques (1<sup>re</sup>)

Une suite est **géométrique** lorsqu'on passe d'un terme au suivant en **multipliant toujours par le même nombre**  $q$ , appelé raison :  $u_{n+1} = u_n \times q$ .

**Terme général :**  $u_n = u_0 \times q^n$  (à partir de  $u_0$ ).

**Sens de variation (cas  $u_0 > 0$ ) :** si  $q > 1$ , la suite est croissante ; si  $0 < q < 1$ , elle est décroissante ; si  $q = 1$ , elle est constante.

**Exemple.** Suite géométrique de premier terme  $v_0 = 2$  et de raison  $q = 3$ . Alors  $v_n = 2 \times 3^n$ , donc  $v_4 = 2 \times 3^4 = 2 \times 81 = 162$ . Comme  $v_0 = 2 > 0$  et  $q = 3 > 1$ , la suite est croissante.

## Méthode : reconnaître la nature d'une suite

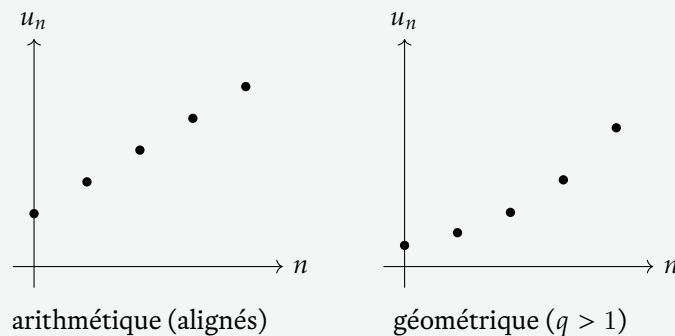
1. Calculer les différences  $u_1 - u_0, u_2 - u_1, u_3 - u_2$ . Si elles sont toutes égales, la suite est arithmétique et cette valeur commune est la raison  $r$ .

- Sinon, calculer les quotients  $\frac{u_1}{u_0}, \frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_2}$ . S'ils sont tous égaux, la suite est géométrique et cette valeur commune est la raison  $q$ .
- Si ni les différences ni les quotients ne sont constants, la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

**Exemple.** Soit la suite 3, 6, 12, 24. Les différences sont 3, 6, 12 : elles ne sont pas constantes, la suite n'est pas arithmétique. Les quotients sont  $\frac{6}{3} = 2, \frac{12}{6} = 2, \frac{24}{12} = 2$  : ils sont constants, la suite est géométrique de raison  $q = 2$ .

### Représentation et sens de variation (1<sup>re</sup>)

On représente une suite par des points isolés d'abscisses 0, 1, 2, ... Pour une suite arithmétique, les points sont **alignés** ; pour une suite géométrique (de premier terme positif), ils suivent une **courbe** de plus en plus raide (si  $q > 1$ ). De façon générale, on étudie le signe de la différence  $u_{n+1} - u_n$  : si elle est positive pour tout  $n$ , la suite est croissante.



**Exercice 1** *Calculer des termes et reconnaître la nature* Pour chaque suite, calculer les quatre premiers termes, puis préciser sa nature (arithmétique, géométrique, ou ni l'une ni l'autre).

- $u_n = 7 - 2n$ .
- $v_0 = 3$  et  $v_{n+1} = 2v_n$ .
- $w_n = n^2$ .

**Exercice 2** *Terme général et variations*  $(u_n)$  est une suite arithmétique de premier terme  $u_0 = 12$  et de raison  $r = -1,5$ .

- Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- Calculer  $u_8$ .
- La suite est-elle croissante ou décroissante ? Justifier.

**Exercice 3** *Synthèse (4 points)* On place un capital de 2000 € sur un compte qui rapporte 4 % par an. On note  $C_n$  le capital, en euros, au bout de  $n$  années, avec  $C_0 = 2000$ .

- Justifier que  $(C_n)$  est géométrique et préciser sa raison.
- Exprimer  $C_n$  en fonction de  $n$ .
- Calculer le capital au bout de 3 ans (arrondir au centime).

## Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Confondre différence et quotient	« $\times 2$ donc arithmétique »	ajouter $\rightarrow$ arithmétique, multiplier $\rightarrow$ géométrique
Se tromper de rang dans $u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 + (n + 1)r$	$u_n = u_0 + n r$ (à partir de $u_0$ )
Écrire $u_0 \times q \times n$	$u_n = u_0 \times q \times n$	$u_n = u_0 \times q^n$
Conclure les variations sans le signe de $r$ ou la valeur de $q$	« ça augmente toujours »	comparer $r$ à 0, ou $q$ à 1

## SOLUTIONS DES EXERCICES

### Corrigé de l'exercice 1.

1.  $u_0 = 7, u_1 = 5, u_2 = 3, u_3 = 1$ . Les différences valent  $-2$  à chaque fois : la suite est arithmétique de raison  $r = -2$ .
2.  $v_0 = 3, v_1 = 6, v_2 = 12, v_3 = 24$ . Chaque terme est le double du précédent : la suite est géométrique de raison  $q = 2$ .
3.  $w_0 = 0, w_1 = 1, w_2 = 4, w_3 = 9$ . Les différences  $(1, 3, 5)$  ne sont pas constantes, et  $w_0 = 0$  exclut une suite géométrique (et les quotients définis ne sont pas constants :  $\frac{w_2}{w_1} = 4 \neq \frac{w_3}{w_2} = 2,25$ ) : la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

### Corrigé de l'exercice 2.

1.  $u_n = u_0 + n r = 12 - 1,5 n$ .
2.  $u_8 = 12 - 1,5 \times 8 = 12 - 12 = 0$ .
3. La raison  $r = -1,5$  est négative, donc la suite est décroissante.

### Corrigé de l'exercice 3.

1. Augmenter de 4% revient à multiplier par  $1 + \frac{4}{100} = 1,04$ . On passe donc de  $C_n$  à  $C_{n+1}$  en multipliant toujours par 1,04 : la suite est géométrique de raison  $q = 1,04$ .
2.  $C_n = C_0 \times q^n = 2000 \times 1,04^n$ .
3.  $C_3 = 2000 \times 1,04^3 = 2000 \times 1,124864 = 2249,73 \text{ €}$  (arrondi au centime).