

Suites : récurrence et limites

En première, on a appris à calculer les termes d'une suite et à reconnaître sa nature. En terminale, deux questions nouvelles se posent : comment **prouver** qu'une formule est vraie pour tous les entiers, et que devient u_n lorsque n devient très grand ? La première question se traite par le **raisonnement par récurrence**, une démonstration en deux temps qui fonctionne comme une chaîne de dominos. La seconde est la question de la **limite** : la suite se rapproche-t-elle d'un nombre, s'envole-t-elle vers l'infini, ou n'a-t-elle aucune limite ? La difficulté principale est de rédiger la récurrence sans oublier d'étape, et de ne pas conclure trop vite face à une forme indéterminée.

Prérequis : Suites numériques, Puissances. **Pour s'entraîner :** Exercices : suites, récurrence et limites.

Le raisonnement par récurrence (T^{le})

On veut prouver qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$. Le principe de récurrence dit qu'il suffit de vérifier deux choses :

Initialisation : $P(n_0)$ est vraie (le premier domino tombe).

Hérédité : pour un entier $n \geq n_0$ **fixé**, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie (chaque domino renverse le suivant).

On conclut alors que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. Les deux étapes sont indispensables : sans initialisation, aucun domino ne tombe ; sans hérédité, la chute s'arrête.

Méthode : rédiger une récurrence

1. Énoncer clairement la propriété $P(n)$ (une égalité, une inégalité, une divisibilité).
2. **Initialisation :** vérifier $P(n_0)$ par un calcul explicite.
3. **Hérédité :** écrire « Soit $n \geq n_0$. Supposons $P(n)$ vraie » (hypothèse de récurrence), puis *utiliser* cette hypothèse pour établir $P(n+1)$.
4. **Conclusion :** « $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$ ».

Exemple. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Montrons que pour tout n , $u_n = 2^n + 1$.

Initialisation. $2^0 + 1 = 2 = u_0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 0$. Supposons $u_n = 2^n + 1$. Alors

$$u_{n+1} = 2u_n - 1 = 2(2^n + 1) - 1 \quad (\text{hypothèse de récurrence})$$

$$u_{n+1} = 2^{n+1} + 2 - 1 = 2^{n+1} + 1.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = 2^n + 1$.

Exercice 1 *Rédiger une récurrence, étape par étape (T^{le})* La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. On veut montrer que pour tout entier n , $u_n = 3 \times 2^n - 1$. Compléter la démonstration.

1. **Initialisation.** $3 \times 2^0 - 1 = \dots$ et $u_0 = \dots$: la propriété est vraie au rang 0.
2. **Hérédité.** Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n = \dots$. Alors $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(\dots) + 1 = \dots - 2 + 1 = 3 \times 2^{n+1} - 1$.
3. **Conclusion.** ...
4. Vérifier la formule en calculant u_1 et u_2 de deux façons.

Exercice 2 Démontrer par récurrence (T^{le})

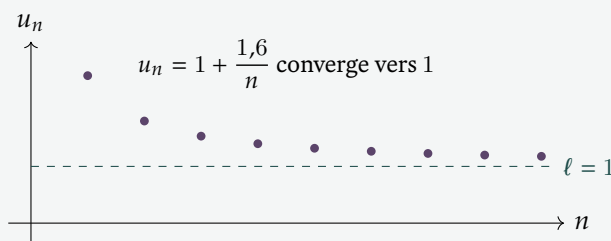
1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $4^n - 1$ est un multiple de 3.
3. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. Montrer que pour tout entier n , $0 \leq u_n \leq 3$.

Limite d'une suite (T^{le})

Suite convergente : (u_n) converge vers le réel ℓ si u_n se rapproche de ℓ autant qu'on veut lorsque n grandit : tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Suite divergente vers $+\infty$: u_n dépasse n'importe quel nombre A à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (de même vers $-\infty$).

Pas de limite : certaines suites ne convergent pas et ne tendent pas vers l'infini, comme $u_n = (-1)^n$, qui alterne entre -1 et 1 .



Limites de référence (T^{le})

Suite	Limite quand $n \rightarrow +\infty$
$n, n^2, n^3, \sqrt{n}$	$+\infty$
$\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{\sqrt{n}}$	0
q^n avec $q > 1$	$+\infty$
q^n avec $-1 < q < 1$	0
q^n avec $q = 1$	1
q^n avec $q \leq -1$	pas de limite

Pour une suite géométrique $u_n = u_0 \times q^n$, tout dépend donc de la raison q : si $-1 < q < 1$, elle converge vers 0 ; si $q > 1$ et $u_0 > 0$, elle tend vers $+\infty$.

Exercice 3 Limites de référence et suites géométriques (T^{le})

1. Donner la limite de chaque suite, en justifiant par une limite de référence.

a) $u_n = 5 + \frac{1}{n}$

b) $v_n = 3n^2 - 7$

c) $w_n = 0,8^n$

d) $x_n = 2 \times 1,05^n$

e) $y_n = 1 - \frac{3}{n^2}$

f) $z_n = (-2)^n$

2. Un capital de 2000 € est placé à 4 % par an : $C_n = 2000 \times 1,04^n$. Donner la limite de (C_n) et l'interpréter.

3. Un médicament s'élimine de 25 % par heure : $m_n = 200 \times 0,75^n$ (en mg). Donner la limite de (m_n) et l'interpréter.

Opérations sur les limites (T^{le})

Si $u_n \rightarrow \ell$ et $v_n \rightarrow \ell'$ (réels), alors $u_n + v_n \rightarrow \ell + \ell'$, $u_n v_n \rightarrow \ell \ell'$ et, si $\ell' \neq 0$, $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow \frac{\ell}{\ell'}$. Avec des limites infinies, les règles sont celles du bon sens ($\ell + \infty = \infty$, $\ell \times (+\infty) = \pm\infty$ selon le signe de $\ell \neq 0$, $\frac{\ell}{\pm\infty} = 0$), **sauf** dans quatre cas où l'on ne peut pas conclure directement, les **formes indéterminées** :

$$\ll +\infty - \infty \gg, \quad \ll 0 \times \infty \gg, \quad \ll \frac{\infty}{\infty} \gg, \quad \ll \frac{0}{0} \gg.$$

Méthode : lever une forme indéterminée

1. Repérer le **terme dominant** (la plus grande puissance de n , ou la plus grande base pour des puissances).
2. Le mettre en facteur au numérateur et au dénominateur.
3. Les autres termes tendent alors vers 0 et la limite se lit directement.

Exemples A. $u_n = n^2 - 4n$ est de la forme « $+\infty - \infty$ ». On factorise : $u_n = n^2 \left(1 - \frac{4}{n}\right)$. Or $n^2 \rightarrow +\infty$ et $1 - \frac{4}{n} \rightarrow 1$, donc $u_n \rightarrow +\infty$.

B. $v_n = \frac{3n+2}{n-1}$ est de la forme « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On factorise par n : $v_n = \frac{n \left(3 + \frac{2}{n}\right)}{n \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{3 + \frac{2}{n}}{1 - \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{3}{1} = 3$.

Exercice 4 Lever une forme indéterminée, étape par étape (T^{le})

1. Compléter : $u_n = 3n^2 - 5n + 1 = n^2 \left(3 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$. Or $n^2 \rightarrow \dots$ et $3 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \rightarrow \dots$, donc $u_n \rightarrow \dots$
2. Compléter : $v_n = \frac{2n+1}{n+3} = \frac{n(\dots)}{n(\dots)} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{\dots} \rightarrow \frac{\dots}{\dots} = \dots$
3. Déterminer la limite de $w_n = \frac{5 \times 2^n + 1}{2^n}$.
4. Déterminer la limite de $x_n = n - \sqrt{n}$. Indication : $n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}$.

Théorèmes de comparaison (T^{le})

On suppose les inégalités vraies à partir d'un certain rang.

Comparaison : si $u_n \leq v_n$ et $u_n \rightarrow +\infty$, alors $v_n \rightarrow +\infty$. Si $u_n \leq v_n$ et $v_n \rightarrow -\infty$, alors $u_n \rightarrow -\infty$.

Encadrement (gendarmes) : si $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si u_n et w_n tendent vers le **même** réel ℓ , alors $v_n \rightarrow \ell$.

Ces théorèmes servent dès qu'une suite contient un terme borné mais sans limite, comme $(-1)^n$, $\cos(n)$ ou $\sin(n)$.

Exemple. Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geq 1$. Comme $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, on a $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. Or $-\frac{1}{n} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$: d'après le théorème des gendarmes, $u_n \rightarrow 0$.

Exercice 5 Encadrer pour conclure (T^{le}) Déterminer la limite de chaque suite ($n \geq 1$) à l'aide d'un théorème de comparaison.

1. $u_n = 2 + \frac{\sin(n)}{n}$
2. $v_n = n + \cos(n)$
3. $w_n = \frac{3 + (-1)^n}{n^2}$

Suites monotones et convergence (T^{le})

Majorée, minorée : (u_n) est majorée par M si $u_n \leq M$ pour tout n ; minorée par m si $u_n \geq m$ pour tout n .

Théorème de convergence monotone : une suite **croissante et majorée** converge ; une suite **décroissante et minorée** converge. (Le théorème donne l'existence de la limite, pas sa valeur.)

Croissante non majorée : une suite croissante qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.

Limite d'une suite récurrente : si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue et si $u_n \rightarrow \ell$, alors ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. On trouve la limite en résolvant cette équation.

Méthode : étudier une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par récurrence un encadrement de u_n (souvent $a \leq u_n \leq b$).
2. Montrer que la suite est monotone (signe de $u_{n+1} - u_n$, en utilisant l'encadrement).
3. Conclure à la convergence par le théorème de convergence monotone.
4. Déterminer la limite en résolvant $f(\ell) = \ell$ et en retenant la solution compatible avec l'encadrement.

Exercice 6 Problème en contexte : une suite récurrente (T^{le}) On reprend la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. On a montré à l'exercice 2 que $0 \leq u_n \leq 3$ pour tout n .

1. Calculer u_1 et u_2 (arrondir au millièm). Que conjecture-t-on sur le sens de variation ?
2. Montrer que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ équivaut à $(u_n - 3)(u_n + 2) \leq 0$. En déduire que (u_n) est croissante.
3. Justifier que (u_n) converge.
4. Déterminer sa limite ℓ .

Exercice 7 Problème en contexte : atteindre un seuil (T^{le}) Un patient prend 200 mg d'un médicament ; chaque heure, l'organisme élimine 25 % de la quantité présente. On note m_n la quantité, en mg, après n heures : $m_n = 200 \times 0,75^n$.

1. Justifier que (m_n) est décroissante et donner sa limite.
2. Le médicament est considéré comme éliminé lorsque $m_n < 1$ mg. Compléter le tableau ci-dessous (arrondir au centième) et déterminer le premier rang n pour lequel $m_n < 1$.

n	16	17	18	19
m_n	...	...	...	...

3. Décrire un algorithme (en français ou en Python) qui calcule ce rang à partir de $m_0 = 200$.

Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Oublier l'initialisation	« l'hérédité est vraie, donc c'est démontré »	vérifier $P(n_0)$: sans premier domino, rien ne tombe
Supposer $P(n)$ « pour tout n » dans l'hérédité	« supposons $P(n)$ vraie pour tout n »	« soit n fixé, supposons $P(n)$ vraie » : on suppose un seul rang
Conclure sur une forme indéterminée	$n^2 - n \rightarrow 0$ car « $\infty - \infty = 0$ »	factoriser : $n^2(1 - \frac{1}{n}) \rightarrow +\infty$
Croire que croissante suffit	« (u_n) croissante donc $u_n \rightarrow +\infty$ »	croissante et non majorée ; si elle est majorée, elle converge
Oublier le cas $q \leq -1$	$(-2)^n \rightarrow +\infty$	$(-2)^n$ n'a pas de limite (signe alterné)

Exercice 8 *QCM (T^e)* Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

- La limite de la suite $u_n = 0,3^n$ est :
 A. $+\infty$ B. 0,3 C. 0 D. elle n'existe pas
- La limite de la suite $v_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 - 3}$ est :
 A. 2 B. $+\infty$ C. 0 D. $-\frac{1}{3}$
- Dans une démonstration par récurrence, l'hérédité consiste à :
 A. vérifier que $P(0)$ est vraie B. supposer $P(n)$ vraie pour tout entier n
 C. calculer u_{n+1} à partir de u_n D. montrer que, pour un n fixé, $P(n)$ vraie entraîne $P(n+1)$ vraie
- Une suite croissante et majorée par 5 :
 A. tend vers 5 B. converge vers un réel $\ell \leq 5$
 C. tend vers $+\infty$ D. n'a pas de limite

Exercice 9 *Vrai ou faux?* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

- Si $u_n \rightarrow 0$, alors $u_n = 0$ à partir d'un certain rang.
- Toute suite croissante tend vers $+\infty$.
- Pour tout réel q tel que $-1 < q < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout n et $v_n \rightarrow 0$, alors $u_n \rightarrow 0$.
- L'hérédité seule suffit à prouver qu'une propriété est vraie pour tout n .
- La suite $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.
- Si $u_n \rightarrow +\infty$ et $v_n \rightarrow -\infty$, alors $u_n + v_n \rightarrow 0$.
- Si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue et $u_n \rightarrow \ell$, alors $f(\ell) = \ell$.

*Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche **Que faire quand je bloque ?***
*Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche **Mémorisation et sciences cognitives.***
*Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton **Carnet d'erreurs.***

SOLUTIONS DES EXERCICES

Corrigé de l'exercice 1.

1. $3 \times 2^0 - 1 = 3 - 1 = 2$ et $u_0 = 2$: la propriété est vraie au rang 0.
2. Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n = 3 \times 2^n - 1$. Alors $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(3 \times 2^n - 1) + 1 = 3 \times 2^{n+1} - 2 + 1 = 3 \times 2^{n+1} - 1$. La propriété est vraie au rang $n + 1$.
3. Pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = 3 \times 2^n - 1$.
4. Par la relation : $u_1 = 2 \times 2 + 1 = 5$ et $u_2 = 2 \times 5 + 1 = 11$. Par la formule : $3 \times 2 - 1 = 5$ et $3 \times 4 - 1 = 11$. ✓

Corrigé de l'exercice 2.

1. **Initialisation.** Pour $n = 1$: la somme vaut 1 et $\frac{1 \times 2}{2} = 1$. Vraie. **Hérédité.** Soit $n \geq 1$. Supposons $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Alors
$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$
$$1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$
qui est la formule au rang $n + 1$. **Conclusion** : vraie pour tout $n \geq 1$.
2. **Initialisation.** $4^0 - 1 = 0 = 3 \times 0$: multiple de 3. **Hérédité.** Soit $n \geq 0$. Supposons $4^n - 1 = 3k$ avec k entier. Alors $4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4(3k + 1) - 1 = 12k + 3 = 3(4k + 1)$, multiple de 3. **Conclusion** : $4^n - 1$ est un multiple de 3 pour tout $n \geq 0$.
3. **Initialisation.** $u_0 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 3$. Vraie. **Hérédité.** Soit $n \geq 0$. Supposons $0 \leq u_n \leq 3$. Alors $6 \leq u_n + 6 \leq 9$, et comme la fonction racine carrée est croissante, $\sqrt{6} \leq \sqrt{u_n + 6} \leq 3$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq 3$. **Conclusion** : pour tout n , $0 \leq u_n \leq 3$.

Corrigé de l'exercice 3.

1.
 - a) $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, donc $u_n \rightarrow 5$.
 - b) $n^2 \rightarrow +\infty$, donc $3n^2 \rightarrow +\infty$ et $v_n \rightarrow +\infty$.
 - c) $-1 < 0,8 < 1$, donc $w_n = 0,8^n \rightarrow 0$.
 - d) $1,05 > 1$, donc $1,05^n \rightarrow +\infty$ et $x_n \rightarrow +\infty$.
 - e) $\frac{3}{n^2} \rightarrow 0$, donc $y_n \rightarrow 1$.
 - f) $-2 \leq -1$: la suite $(-2)^n$ alterne entre des valeurs positives et négatives de plus en plus grandes en valeur absolue, elle n'a pas de limite.
2. $1,04 > 1$, donc $1,04^n \rightarrow +\infty$ et $C_n \rightarrow +\infty$: le capital dépasse n'importe quelle somme si l'on attend assez longtemps (sans limite théorique).
3. $0 < 0,75 < 1$, donc $0,75^n \rightarrow 0$ et $m_n \rightarrow 0$: la quantité de médicament dans l'organisme tend vers zéro, sans jamais l'atteindre exactement.

Corrigé de l'exercice 4.

1. $u_n = n^2 \left(3 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$. Or $n^2 \rightarrow +\infty$ et $3 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \rightarrow 3$, donc $u_n \rightarrow +\infty$ (produit d'une suite tendant vers $+\infty$ par une suite tendant vers $3 > 0$).
2. $v_n = \frac{n \left(2 + \frac{1}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{3}{n} \right)} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \rightarrow \frac{2}{1} = 2$.
3. $w_n = \frac{5 \times 2^n}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 5 + \left(\frac{1}{2} \right)^n$. Comme $\left(\frac{1}{2} \right)^n \rightarrow 0$, $w_n \rightarrow 5$.
4. $x_n = \sqrt{n} (\sqrt{n} - 1)$. Or $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$ et $\sqrt{n} - 1 \rightarrow +\infty$, donc $x_n \rightarrow +\infty$. La forme « $+\infty - \infty$ » est levée par la factorisation.

Corrigé de l'exercice 5.

1. $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, donc $2 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 2 + \frac{1}{n}$. Les deux suites encadrantes tendent vers 2 : par le théorème des gendarmes, $u_n \rightarrow 2$.
2. $\cos(n) \geq -1$, donc $v_n \geq n - 1$. Or $n - 1 \rightarrow +\infty$: par comparaison, $v_n \rightarrow +\infty$.
3. $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $2 \leq 3 + (-1)^n \leq 4$ et $\frac{2}{n^2} \leq w_n \leq \frac{4}{n^2}$. Les deux bornes tendent vers 0 : $w_n \rightarrow 0$.

Corrigé de l'exercice 6.

1. $u_1 = \sqrt{7} \approx 2,646$ et $u_2 = \sqrt{\sqrt{7} + 6} \approx \sqrt{8,646} \approx 2,941$. La suite semble croissante et se rapprocher de 3.
2. Comme $u_n \geq 0$ et $\sqrt{u_n + 6} \geq 0$, on a $\sqrt{u_n + 6} \geq u_n \iff u_n + 6 \geq u_n^2 \iff u_n^2 - u_n - 6 \leq 0$ (on élève au carré deux nombres positifs, ce qui conserve l'ordre). Le trinôme $x^2 - x - 6$ a pour racines 3 et -2, donc $u_n^2 - u_n - 6 = (u_n - 3)(u_n + 2)$. Or $0 \leq u_n \leq 3$ donne $u_n - 3 \leq 0$ et $u_n + 2 > 0$: le produit est négatif ou nul. Donc $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n : la suite est croissante.
3. (u_n) est croissante et majorée par 3 : d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ , avec $0 \leq \ell \leq 3$.
4. La fonction $f(x) = \sqrt{x + 6}$ est continue sur $[0 ; 3]$, donc ℓ vérifie $\ell = \sqrt{\ell + 6}$, soit $\ell^2 - \ell - 6 = 0$, d'où $\ell = 3$ ou $\ell = -2$. Comme $\ell \geq 0$, $\ell = 3$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

Corrigé de l'exercice 7.

1. $m_{n+1} = 0,75 m_n < m_n$ car $m_n > 0$: la suite est décroissante. Comme $0 < 0,75 < 1$, $0,75^n \rightarrow 0$ et $m_n \rightarrow 0$.
2. $m_{16} = 200 \times 0,75^{16} \approx 2,00$; $m_{17} \approx 1,50$; $m_{18} \approx 1,13$; $m_{19} \approx 0,85$. Le premier rang pour lequel $m_n < 1$ est $n = 19$: le médicament est éliminé au bout de 19 heures.
3. On part de $n = 0$ et $m = 200$. Tant que $m \geq 1$: on remplace m par $0,75 m$ et on ajoute 1 à n . À la sortie de la boucle, n est le rang cherché. En Python : `n = 0; m = 200; while m >= 1: m = 0.75 * m ; n = n + 1 ;` puis afficher `n`, qui vaut 19.

Corrigé de l'exercice 8.

1. **Réponse C.** $-1 < 0,3 < 1$, donc $0,3^n \rightarrow 0$.
 - A : c'est le cas $q > 1$.
 - B : la limite n'est pas la raison ; $0,3^n$ vaut $0,3$ seulement pour $n = 1$.
 - D : la suite est géométrique de raison positive inférieure à 1, elle converge.

2. **Réponse A.** $v_n = \frac{n^2 \left(2 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 - \frac{3}{n^2}\right)} \rightarrow \frac{2}{1} = 2.$

- B : forme « $\frac{\infty}{\infty}$ » conclue trop vite ; les termes dominants se compensent.
- C : confusion avec le cas où le dénominateur l'emporte.
- D : quotient des termes constants, sans signification pour la limite.

3. **Réponse D.** L'hérédité est une implication : de $P(n)$ (pour un rang fixé) on déduit $P(n + 1)$.

- A : c'est l'initialisation.
- B : supposer $P(n)$ pour tout n revient à supposer ce qu'on veut démontrer.
- C : calculer u_{n+1} n'est qu'un outil éventuel, pas le principe.

4. **Réponse B.** Théorème de convergence monotone : elle converge, et sa limite est inférieure ou égale au majorant.

- A : le majorant n'est pas forcément la limite ($u_n = 1 - \frac{1}{n}$ est majorée par 5 et converge vers 1).
- C : impossible, elle est majorée.
- D : une suite croissante majorée a toujours une limite.

Corrigé de l'exercice 9.

- A. Faux.** $u_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0 sans jamais valoir 0. Converger vers ℓ , c'est s'en rapprocher autant qu'on veut, pas l'atteindre.
- B. Faux.** $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ est croissante et converge vers 1. Une suite croissante tend vers $+\infty$ seulement si elle n'est pas majorée.
- C. Vrai.** C'est la limite de référence des suites géométriques de raison strictement comprise entre -1 et 1 .
- D. Vrai.** C'est le théorème des gendarmes avec $0 \leq u_n \leq v_n$: les deux bornes tendent vers 0.
- E. Faux.** Contre-exemple : $P(n)$: « 2^n est un multiple de 3 ». Si $2^n = 3k$, alors $2^{n+1} = 3 \times 2k$: l'hérédité est vraie. Pourtant $P(0)$ est fausse (1 n'est pas multiple de 3), et $P(n)$ est fausse pour tout n . Sans initialisation, rien n'est prouvé.
- F. Vrai.** Elle vaut alternativement 1 et -1 : elle ne se rapproche d'aucun réel et ne tend pas vers l'infini.
- G. Faux.** « $+\infty - \infty$ » est une forme indéterminée. Avec $u_n = n^2$ et $v_n = -n$, $u_n + v_n = n^2 - n \rightarrow +\infty$.
- H. Vrai.** En passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, la continuité de f donne $\ell = f(\ell)$: la limite est un point fixe de f .