

Suites : récurrence et limites — Fiche d'exercices

Cette fiche accompagne le mémo sur les suites en terminale. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver les trois étapes d'une récurrence, les limites de référence et les théorèmes de comparaison. Rédige chaque récurrence en entier : initialisation, hérédité, conclusion.

Exercice 1 Rédiger une récurrence, étape par étape (T^{le}). La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. On veut montrer que pour tout entier n , $u_n = 3 \times 2^n - 1$. Compléter la démonstration.

1. **Initialisation.** $3 \times 2^{\dots\dots\dots} - 1 = \dots\dots\dots$ et $u_0 = \dots\dots\dots$: la propriété est vraie au rang 0.
2. **Hérédité.** Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n = \dots\dots\dots$
Alors $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(\dots\dots\dots) + 1 = \dots\dots\dots - 2 + 1 = 3 \times 2^{\dots\dots\dots} - 1$.
3. **Conclusion.** $\dots\dots\dots$
4. Vérifier la formule en calculant u_1 et u_2 de deux façons.

Exercice 2 Démontrer par récurrence (T^{le}).

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $4^n - 1$ est un multiple de 3.

3. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. Montrer que pour tout entier n , $0 \leq u_n \leq 3$.

Exercice 3 Limites de référence et suites géométriques (T^{le}).

- Donner la limite de chaque suite, en justifiant par une limite de référence.
 - $u_n = 5 + \frac{1}{n}$:
 - $v_n = 3n^2 - 7$:
 - $w_n = 0,8^n$:
 - $x_n = 2 \times 1,05^n$:
 - $y_n = 1 - \frac{3}{n^2}$:
 - $z_n = (-2)^n$:
- Un capital de 2000 € est placé à 4 % par an : $C_n = 2000 \times 1,04^n$. Donner la limite de (C_n) et l'interpréter.

- Un médicament s'élimine de 25 % par heure : $m_n = 200 \times 0,75^n$ (en mg). Donner la limite de (m_n) et l'interpréter.

Exercice 4 Lever une forme indéterminée, étape par étape (T^{le}).

- Compléter : $u_n = 3n^2 - 5n + 1 = n^2 \left(3 - \frac{\dots\dots\dots}{n} + \frac{\dots\dots\dots}{n^2} \right)$. Or $n^2 \rightarrow \dots\dots\dots$ et $3 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \rightarrow \dots\dots\dots$, donc $u_n \rightarrow \dots\dots\dots$
- Compléter : $v_n = \frac{2n+1}{n+3} = \frac{n(\dots\dots\dots)}{n(\dots\dots\dots)} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{\dots\dots\dots} \rightarrow \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$
- Déterminer la limite de $w_n = \frac{5 \times 2^n + 1}{2^n}$.

- Déterminer la limite de $x_n = n - \sqrt{n}$. Indication : $n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}$.

Exercice 5 Encadrer pour conclure (T^le). Déterminer la limite de chaque suite ($n \geq 1$) à l'aide d'un théorème de comparaison.

1. $u_n = 2 + \frac{\sin(n)}{n}$

2. $v_n = n + \cos(n)$

3. $w_n = \frac{3 + (-1)^n}{n^2}$

Exercice 6 Problème en contexte : une suite récurrente (T^le). On reprend la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. On a montré à l'exercice 2 que $0 \leq u_n \leq 3$ pour tout n .

1. Calculer u_1 et u_2 (arrondir au millièmè). Que conjecture-t-on sur le sens de variation ?
 $u_1 = \dots\dots\dots$ $u_2 = \dots\dots\dots$ Conjecture : $\dots\dots\dots$
2. Montrer que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ équivaut à $(u_n - 3)(u_n + 2) \leq 0$. En déduire que (u_n) est croissante.

3. Justifier que (u_n) converge.

4. Déterminer sa limite ℓ .

Exercice 7 Problème en contexte : atteindre un seuil (T^e). Un patient prend 200 mg d'un médicament ; chaque heure, l'organisme élimine 25 % de la quantité présente. On note m_n la quantité, en mg, après n heures : $m_n = 200 \times 0,75^n$.

1. Justifier que (m_n) est décroissante et donner sa limite.

.....
.....

2. Le médicament est considéré comme éliminé lorsque $m_n < 1$ mg. Compléter le tableau ci-dessous (arrondir au centième) et déterminer le premier rang n pour lequel $m_n < 1$.

n	16	17	18	19
m_n				

Premier rang :

3. Décrire un algorithme (en français ou en Python) qui calcule ce rang à partir de $m_0 = 200$.

Exercice 8 QCM (T^e). Pour chaque question, entourer la bonne réponse.

1. La limite de la suite $u_n = 0,3^n$ est :
A. $+\infty$ B. 0,3 C. 0 D. elle n'existe pas
2. La limite de la suite $v_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 - 3}$ est :
A. 2 B. $+\infty$ C. 0 D. $-\frac{1}{3}$
3. Dans une démonstration par récurrence, l'hérédité consiste à :
A. vérifier que $P(0)$ est vraie B. supposer $P(n)$ vraie pour tout entier n
C. calculer u_{n+1} à partir de u_n D. montrer que, pour un n fixé, $P(n)$ vraie entraîne $P(n + 1)$ vraie
4. Une suite croissante et majorée par 5 :
A. tend vers 5 B. converge vers un réel $\ell \leq 5$
C. tend vers $+\infty$ D. n'a pas de limite

Exercice 9 Vrai ou faux? Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Si $u_n \rightarrow 0$, alors $u_n = 0$ à partir d'un certain rang.

B. Toute suite croissante tend vers $+\infty$.

C. Pour tout réel q tel que $-1 < q < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

D. Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout n et $v_n \rightarrow 0$, alors $u_n \rightarrow 0$.

E. L'hérédité seule suffit à prouver qu'une propriété est vraie pour tout n .

F. La suite $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

G. Si $u_n \rightarrow +\infty$ et $v_n \rightarrow -\infty$, alors $u_n + v_n \rightarrow 0$.

H. Si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue et $u_n \rightarrow \ell$, alors $f(\ell) = \ell$.