

Sommes de variables aléatoires — Fiche d'exercices

Cette fiche accompagne le mémo sur les sommes de variables aléatoires. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver la linéarité de l'espérance, la formule de la variance d'une somme de variables indépendantes, les formules de l'échantillon (S_n et M_n), l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et l'inégalité de concentration. Avant d'additionner des variances, demande-toi toujours si les variables sont indépendantes.

Exercice 1 *Espérance et variance d'une somme, étape par étape (T^e)*. On lance deux dés équilibrés ; X et Y désignent les résultats.

1. Compléter : $E(X) = \dots\dots\dots$, donc $E(X + Y) = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

2. Montrer que $V(X) = \frac{35}{12}$ (on pourra calculer $E(X^2)$).

3. On pose $G = 2X - 3$. Calculer $E(G)$ et $V(G)$.

4. On pose $T = X + 10$. Comparer $V(T)$ et $V(X)$, puis $E(T)$ et $E(X)$. Interpréter.

.....
.....

Exercice 2 *Additionner des variances (T^e)*.

1. Pour la somme S de deux dés, calculer $V(S)$ et $\sigma(S)$ (arrondi au centième).

2. Soit $D = X - Y$ la différence des deux dés. Calculer $E(D)$ et $V(D)$ (on pourra écrire $D = X + (-Y)$).

3. X suit $\mathcal{B}(10 ; 0,3)$ et Y suit $\mathcal{B}(5 ; 0,3)$, indépendantes. Quelle est la loi de $X + Y$? Vérifier la cohérence avec les formules d'espérance et de variance.

4. Donner un exemple de deux variables X et Y de même variance non nulle telles que $V(X + Y) = 0$. Sont-elles indépendantes?

Exercice 3 *Somme et moyenne d'un échantillon, étape par étape (T^{le})*. À un jeu, le gain X d'une partie (en euros) a pour espérance 0,5 et pour écart-type 2. Un joueur fait $n = 100$ parties indépendantes ; S_{100} est son gain total et M_{100} son gain moyen par partie.

1. Compléter : $E(S_{100}) = 100 \times \dots = \dots$; $V(S_{100}) = 100 \times \dots = \dots$; $\sigma(S_{100}) = \dots$
2. Calculer $E(M_{100})$ et $\sigma(M_{100})$.

3. Combien de parties faudrait-il pour que $\sigma(M_n) \leq 0,05$?

4. On note X_i la variable qui vaut 1 si la partie i est gagnée (probabilité p) et 0 sinon. Quelle est la loi de $X_1 + \dots + X_n$? Retrouver son espérance et sa variance à partir de celles de X_1 .

Exercice 4 *Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (T^{le})*. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(20 ; 0,5)$.

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
-
2. Majorer $P(|X - 10| \geq 5)$ à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

3. À l'aide de la calculatrice, on trouve $P(X \leq 5) \approx 0,0207$. En déduire une valeur approchée de $P(|X - 10| \geq 5)$ et commenter la qualité du majorant.

4. Que donne l'inégalité pour $\delta = 2$? Que peut-on en conclure?

Exercice 5 Inégalité de concentration et loi des grands nombres (T^{le}). On lance n fois une pièce équilibrée et l'on note F_n la fréquence de « pile » obtenue.

1. Justifier que F_n est la moyenne d'un échantillon d'une variable X dont on précisera l'espérance et la variance.

2. Montrer que $P(|F_n - 0,5| \geq 0,1) \leq \frac{25}{n}$. Que vaut ce majorant pour $n = 100$? pour $n = 1\,000$?

3. Quelle taille d'échantillon garantit $P(|F_n - 0,5| \geq 0,1) \leq 0,01$?

4. On lance maintenant un dé et G_n est la fréquence du « 6 ». Quelle taille garantit $P\left(\left|G_n - \frac{1}{6}\right| \geq 0,05\right) \leq 0,01$?

5. Énoncer ce que dit la loi des grands nombres dans ces deux situations.

.....

.....

.....

Exercice 6 Problème en contexte : contrôle de qualité (T^{le}). Une machine produit des pièces dont 2 % sont défectueuses, indépendamment les unes des autres. On prélève un lot de 500 pièces ; S est le nombre de pièces défectueuses et $F = \frac{S}{500}$ la proportion observée.

1. Quelle est la loi de S ? Calculer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$ (arrondi au centième).

2. Majorer la probabilité que le lot contienne au moins 20 pièces défectueuses.

3. Majorer $P(|F - 0,02| \geq 0,01)$.

4. Quelle taille de lot faudrait-il pour que cette probabilité soit majorée par 0,05 ?

Exercice 7 Problème en contexte : pourquoi une assurance mutualise (T^{le}). Pour un assuré, le coût annuel X des sinistres (en euros) a pour espérance 200 et pour écart-type 1 000. L'assureur fait payer une prime de 230 € à chacun de ses n assurés, supposés indépendants. On note S_n le coût total et M_n le coût moyen par assuré.

1. Exprimer $E(S_n)$, $\sigma(S_n)$ et $\sigma(M_n)$ en fonction de n . Calculer $\sigma(M_n)$ pour $n = 100$, 10 000 et 1 000 000.

2. L'assureur est en perte si $S_n > 230n$. Montrer que cet événement entraîne $|S_n - 200n| \geq 30n$, puis majorer sa probabilité en fonction de n .

D. L'écart-type de la moyenne M_n d'un échantillon tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

E. D'après la loi des grands nombres, M_n est égale à $E(X)$ dès que n est assez grand.

F. Une variable de loi $\mathcal{B}(n ; p)$ est une somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p .

G. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne la valeur exacte de $P(|X - E(X)| \geq \delta)$.

H. Si X et Y sont indépendantes, alors $\sigma(X + Y) \leq \sigma(X) + \sigma(Y)$.