

Le second degré

Un trinôme du second degré est une expression de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On le rencontre dès qu'une grandeur dépend du carré d'une autre : aire d'un terrain, trajectoire d'un ballon, optimisation d'un bénéfice. Tout le chapitre repose sur un seul outil, le **discriminant**, qui répond à trois questions : l'équation a-t-elle des solutions, comment factoriser le trinôme, et quel est son signe. La vraie difficulté n'est pas de calculer le discriminant, mais de reconnaître laquelle de ces trois questions est posée.

Vocabulaire (1^{re})

Trinôme du second degré : expression de la forme $ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$. Le coefficient a est le coefficient dominant.

Racine : un réel x_0 est une racine du trinôme lorsque $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$. Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, c'est chercher ses racines.

Forme développée : l'écriture $ax^2 + bx + c$, celle que l'on lit directement.

Forme factorisée : l'écriture $a(x - x_1)(x - x_2)$ lorsque le trinôme possède deux racines x_1 et x_2 . Elle est très utile pour résoudre et pour étudier le signe.

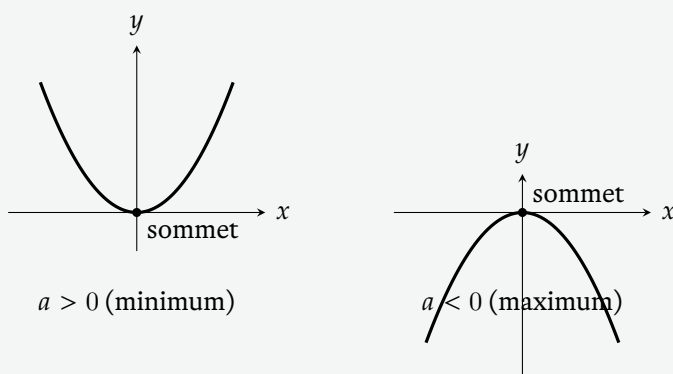
Exemple. Dans $3x^2 - 5x + 2$, on lit $a = 3, b = -5$ et $c = 2$. Dans $-x^2 + 4$, on a $a = -1, b = 0$ et $c = 4$. Dans $2x^2 - x$, on a $a = 2, b = -1$ et $c = 0$: il faut penser à repérer le signe et les coefficients nuls.

La parabole (1^{re})

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est une **parabole**. Son orientation ne dépend que du signe de a :

- si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut et admet un minimum ;
- si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas et admet un maximum.

Le point le plus bas (ou le plus haut) s'appelle le **sommet** ; la parabole est symétrique par rapport à la droite verticale passant par ce sommet.



Le discriminant (1^{re})

Pour le trinôme $ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$), on appelle **discriminant** le nombre

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Le signe de Δ détermine le nombre de racines :

Si $\Delta > 0$: le trinôme a deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta = 0$: le trinôme a une seule racine (dite double) $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$: le trinôme n'a aucune racine réelle.

Exemples A. $x^2 - 5x + 6 : \Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$. Deux racines.

B. $x^2 - 6x + 9 : \Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 36 - 36 = 0$. Une racine double.

C. $x^2 + x + 1 : \Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$. Aucune racine réelle.

Méthode : résoudre $ax^2 + bx + c = 0$

1. Identifier a, b, c (attention aux signes).
2. Calculer $\Delta = b^2 - 4ac$.
3. Conclure selon le signe de Δ , et si $\Delta \geq 0$, calculer la (ou les) racine(s).

Exemple. Résoudre $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

On identifie $a = 2, b = -5, c = 3$, puis on calcule le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1.$$

Comme $\Delta = 1 > 0$, il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 1}{4} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 1}{4} = \frac{3}{2}.$$

L'ensemble des solutions est $S = \left\{ 1 ; \frac{3}{2} \right\}$.

Méthode : factoriser un trinôme

Si $\Delta > 0$ et que x_1, x_2 sont les racines, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Si $\Delta = 0$ et que x_0 est la racine double, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$. Si $\Delta < 0$, le trinôme ne se factorise pas dans les réels.

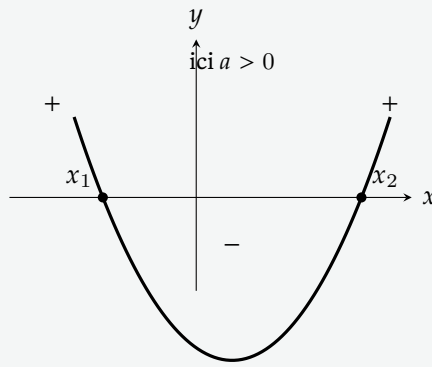
Exemple. Le trinôme $2x^2 - 5x + 3$ a pour racines 1 et $\frac{3}{2}$ (calculées ci-dessus). Donc

$$2x^2 - 5x + 3 = 2(x - 1)\left(x - \frac{3}{2}\right) = (x - 1)(2x - 3).$$

On a fait entrer le facteur 2 dans la seconde parenthèse pour obtenir une écriture sans fraction.

Signe du trinôme (1^{er})

Lorsque $\Delta > 0$, le trinôme est **du signe de a à l'extérieur des racines**, et du signe contraire entre les racines. C'est une lecture directe de la parabole : elle est du côté positif des y quand elle est au-dessus de l'axe des abscisses.



Exemple. Signe de $2x^2 - 5x + 3$: les racines sont 1 et $\frac{3}{2}$, et $a = 2 > 0$. Le trinôme est donc du signe de a (positif) à l'extérieur des racines, et négatif entre elles :

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$2x^2 - 5x + 3$	+	0	-	0	+

Exercice 1 *Calculer un discriminant et résoudre* Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

c) $x^2 + 2x + 5 = 0$

d) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

Exercice 2 *Factoriser et étudier un signe* On considère le trinôme $P(x) = -x^2 + 4x - 3$.

1. Calculer le discriminant et les racines de P .
2. En déduire la forme factorisée de $P(x)$.
3. Étudier le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x .

Exercice 3 *Synthèse (4 points)* Un fabricant estime que son bénéfice, en milliers d'euros, pour x centaines d'objets vendus, est $B(x) = -2x^2 + 12x - 10$.

1. Pour quelles quantités le bénéfice est-il nul?
2. Déterminer les quantités pour lesquelles le bénéfice est positif.
3. Sans calcul supplémentaire, expliquer pourquoi le bénéfice admet un maximum.

Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Oublier le signe dans b^2	$b = -5 \Rightarrow b^2 = -25$	$b^2 = (-5)^2 = 25$
Mal placer les signes dans Δ	$\Delta = b^2 + 4ac$	$\Delta = b^2 - 4ac$
Diviser par a au lieu de $2a$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a}$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
Conclure trop vite quand $\Delta < 0$	« pas de solution donc erreur »	$\Delta < 0$: aucune racine réelle, c'est une réponse valable

SOLUTIONS DES EXERCICES

Corrigé de l'exercice 1.

1. $a = 1, b = -7, c = 10. \Delta = 49 - 40 = 9 > 0$. Racines : $x_1 = \frac{7-3}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{7+3}{2} = 5$. $S = \{2 ; 5\}$.
2. $a = 1, b = -4, c = 4. \Delta = 16 - 16 = 0$. Racine double : $x_0 = \frac{4}{2} = 2$. $S = \{2\}$.
3. $a = 1, b = 2, c = 5. \Delta = 4 - 20 = -16 < 0$. Aucune solution réelle : $S = \emptyset$.
4. $a = 3, b = 5, c = -2. \Delta = 25 + 24 = 49 > 0$. Racines : $x_1 = \frac{-5-7}{6} = -2$ et $x_2 = \frac{-5+7}{6} = \frac{1}{3}$. $S = \left\{-2 ; \frac{1}{3}\right\}$.

Corrigé de l'exercice 2.

1. $a = -1, b = 4, c = -3. \Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 16 - 12 = 4 > 0$.
 $x_1 = \frac{-4-2}{-2} = 3$ et $x_2 = \frac{-4+2}{-2} = 1$.
2. Avec $a = -1 : P(x) = -1(x-3)(x-1) = -(x-3)(x-1)$.
3. Comme $a = -1 < 0$, le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles. Donc $P(x) < 0$ sur $]-\infty ; 1[$, $P(x) > 0$ sur $]1 ; 3[$, $P(x) < 0$ sur $]3 ; +\infty[$, et $P(x) = 0$ pour $x = 1$ et $x = 3$.

Corrigé de l'exercice 3.

1. On résout $-2x^2 + 12x - 10 = 0. \Delta = 12^2 - 4 \times (-2) \times (-10) = 144 - 80 = 64 > 0$.
 $x_1 = \frac{-12-8}{-4} = 5$ et $x_2 = \frac{-12+8}{-4} = 1$. Le bénéfice est nul pour $x = 1$ et $x = 5$ (cent et cinq cents objets).
2. Comme $a = -2 < 0$, $B(x)$ est positif entre les racines : le bénéfice est positif pour $x \in]1 ; 5[$, c'est-à-dire entre cent et cinq cents objets.
3. Le coefficient dominant $a = -2$ est négatif, donc la parabole est tournée vers le bas : la fonction B admet un maximum (atteint au sommet de la parabole).