Le théorème de Pythagore est l'outil fondamental du triangle rectangle : il relie les longueurs des trois côtés. Sa réciproque permet de prouver qu'un triangle est rectangle. La difficulté principale vient de la mémorisation de la formule $a^2 + b^2 = c^2$ sans compréhension géométrique : les élèves retiennent une égalité algébrique sans voir qu'il s'agit de sommes d'aires de carrés, confondent hypoténuse et côtés de l'angle droit, ou oublient d'extraire la racine carrée.

Le théorème de Pythagore (4e)

Énoncé : dans un triangle **rectangle**, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Hypoténuse : c'est le côté **le plus long**, celui qui est **opposé à l'angle droit**. On le repère en cherchant l'angle droit : le côté qui ne touche pas cet angle est l'hypoténuse.

Si le triangle ABC est rectangle en C, alors :

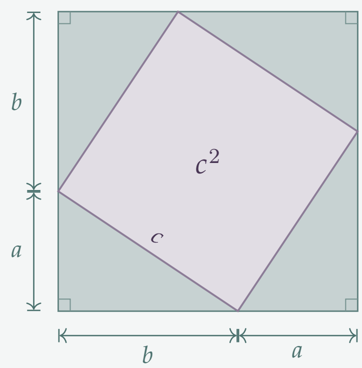
$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

Le côté $[AB]$ est l'hypoténuse (opposé à l'angle droit en C).

Exemples

- Triangle rectangle en C avec $AC = 3$ cm et $BC = 4$ cm : $AB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, donc $AB = \sqrt{25} = 5$ cm.
- Triangle rectangle en A avec $BC = 13$ cm et $AB = 5$ cm : $BC^2 = AB^2 + AC^2$, donc $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 169 - 25 = 144$, d'où $AC = \sqrt{144} = 12$ cm.

Pourquoi cette formule ? Construisons un carré de côté $a + b$ et plaçons-y quatre triangles rectangles identiques de côtés a et b. L'espace restant au centre forme un carré de côté c (l'hypoténuse).



L'aire totale donne $(a + b)^2 = 4 \times \dfrac{ab}{2} + c^2$, ce qui se simplifie en $a^2 + b^2 = c^2$. Le théorème exprime donc une **relation entre les aires** des carrés construits sur les côtés.

Exercice 1 ***Calculer l'hypoténuse (4e)*** Pour chaque triangle rectangle, calculer la longueur manquante. **Attention : le triangle n'est pas toujours dessiné dans la même position.**

1. Le triangle EFG est rectangle en G, avec $EG = 6$ cm et $FG = 8$ cm. Calculer EF.

2. Le triangle RST est rectangle en T, avec $RT = 5$ cm et $ST = 12$ cm. Calculer RS.
3. Le triangle KLM est rectangle en L, avec $KL = 9$ cm et $LM = 40$ cm. Calculer KM.

Calculer un côté de l'angle droit (4e)

Quand c'est **un côté de l'angle droit** qui est inconnu, on isole ce côté dans l'égalité de Pythagore.

Si le triangle ABC est rectangle en C et que l'on cherche AC :

$$AC^2 = AB^2 - BC^2$$

On soustrait le carré du côté connu **au carré de l'hypoténuse**.

Exemples Triangle rectangle en C avec $AB = 10$ cm et $BC = 6$ cm :
$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 100 - 36 = 64$, donc $AC = \sqrt{64} = 8$ cm.

Attention : ne jamais oublier d'extraire la racine carrée. $AC^2 = 64$ *ne signifie pas que* $AC = 64$ *: il faut écrire* $AC = \sqrt{64} = 8$.

Exercice 2 *Calculer un côté de l'angle droit (4e)*

1. Le triangle ABC est rectangle en B, avec $AC = 17$ cm et $BC = 15$ cm. Calculer AB.
2. Le triangle DEF est rectangle en E, avec $DF = 25$ cm et $DE = 7$ cm. Calculer EF.
3. Le triangle PQR est rectangle en Q, avec $PR = 10$ cm et $PQ = 4$ cm. Calculer QR. Le résultat est-il un nombre entier ?

Réciproque du théorème de Pythagore (4e)

La réciproque permet de **prouver qu'un triangle est rectangle** à partir de ses longueurs.

Méthode : on identifie le plus grand côté, puis on compare le carré de ce côté à la somme des carrés des deux autres.

- Si l'égalité est vérifiée : le triangle est rectangle et l'angle droit est opposé au plus grand côté.
- Si l'égalité n'est pas vérifiée : le triangle n'est pas rectangle.

Exemples

- Triangle de côtés 5, 12 et 13 : le plus grand côté est 13.
  $13^2 = 169$ et $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. Comme $13^2 = 5^2 + 12^2$, le triangle est rectangle.
- Triangle de côtés 4, 5 et 7 : le plus grand côté est 7.
  $7^2 = 49$ et $4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$. Comme $49 \neq 41$, le triangle n'est pas rectangle.

Exercice 3 *Le triangle est-il rectangle ? (4e)* Pour chaque triangle, dire s'il est rectangle ou non. Justifier.

1. Triangle ABC avec $AB = 15$ cm, $BC = 20$ cm et $AC = 25$ cm.
2. Triangle DEF avec $DE = 6$ cm, $EF = 9$ cm et $DF = 12$ cm.
3. Triangle GHI avec $GH = 8$ cm, $HI = 15$ cm et $GI = 17$ cm.

Exercice 4 ***Problème en contexte (4e–3e)*** Un écran de télévision a une diagonale de 55 pouces (1 pouce = 2,54 cm). L'écran est au format 16/9, ce qui signifie que le rapport entre la largeur et la hauteur vaut $\frac{16}{9}$.

1. Soit h la hauteur de l'écran en pouces. Exprimer la largeur en fonction de h.
2. En utilisant le théorème de Pythagore, montrer que $h^2 \times \left(1 + \frac{256}{81}\right) = 55^2$.
3. En déduire la valeur de h arrondie au dixième de pouce, puis convertir la hauteur et la largeur en centimètres.

Erreurs classiques sur le théorème de Pythagore

Erreur	Exemple faux	Correction
Oublier la racine carrée	$c = a^2 + b^2$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$: il faut extraire la racine
Se tromper d'hypoténuse	Écrire $AC^2 = AB^2 + BC^2$ quand l'angle droit est en C	L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit : ici c'est $[AB]$
Additionner au lieu de soustraire	$AC^2 = AB^2 + BC^2$ pour trouver un côté de l'angle droit	Pour un côté de l'angle droit, on soustrait : $AC^2 = AB^2 - BC^2$
Appliquer Pythagore à un triangle non rectangle	Utiliser $a^2 + b^2 = c^2$ dans un triangle quelconque	Le théorème ne s'applique qu'aux triangles **rectangles**. Vérifier d'abord la présence d'un angle droit
Confondre côtés et longueurs	Écrire $[AB]^2$ au lieu de AB^2	$[AB]$ est un segment (objet géométrique), AB est sa longueur (un nombre). On met au carré la **longueur**

Exercice 5 ***QCM (4e)*** Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. Un triangle rectangle a des côtés de l'angle droit mesurant 6 cm et 8 cm. L'hypoténuse mesure :

   A. 14 cm **B.** 10 cm **C.** 100 cm **D.** 48 cm

2. Un triangle a des côtés de longueurs 7, 24 et 25. Ce triangle est :

   A. équilatéral **B.** rectangle **C.** isocèle **D.** quelconque

3. Le triangle ABC est rectangle en A, avec $AB = 3$ cm et $AC = 4$ cm. Le côté BC mesure :

   A. 7 cm **B.** $\sqrt{7}$ cm **C.** 5 cm **D.** 25 cm

4. Le triangle DEF est rectangle en F, avec $DE = 13$ cm et $DF = 12$ cm. Le côté EF mesure :

   A. 1 cm **B.** $\sqrt{313}$ cm **C.** 5 cm **D.** 25 cm

5. Un triangle a des côtés mesurant 3 cm, 4 cm et 6 cm. Ce triangle est :

   A. rectangle en A **B.** rectangle en B **C.** rectangle en C **D.** non rectangle

Exercice 6 ***Vrai ou faux ?*** Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Le théorème de Pythagore s'applique à tous les triangles.

B. Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est toujours le côté horizontal.

C. Si $AB^2 = AC^2 + BC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en C.

D. Un triangle dont les côtés mesurent 3 cm, 4 cm et 6 cm est rectangle.

E. $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ pour tous nombres positifs a et b.

F. Si un triangle a un angle droit en C, alors $[AB]$ est l'hypoténuse.

Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche ***Que faire quand je bloque ?***
Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche ***Mémorisation et sciences cognitives****.*
Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton ***Carnet d'erreurs****.*