

# Le produit scalaire

Le produit scalaire est une opération qui, à deux vecteurs, associe un nombre (un scalaire). Il sert à mesurer des angles et, surtout, à reconnaître quand deux directions sont perpendiculaires : deux vecteurs sont orthogonaux exactement lorsque leur produit scalaire est nul. On dispose de deux formules selon les données : l'une avec les coordonnées, l'autre avec les normes et l'angle. La difficulté est de choisir la bonne formule et de ne pas oublier que le résultat est un nombre, pas un vecteur.

## Définition avec les coordonnées (1<sup>re</sup>)

Dans un repère orthonormé, si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ , alors le **produit scalaire** de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le nombre

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

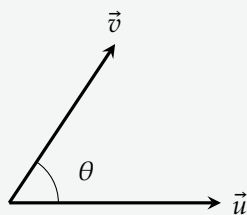
**Exemple.** Avec  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + (-1) \times 5 = 6 - 5 = 1$ . Le résultat est un nombre.

## Définition avec les normes et l'angle (1<sup>re</sup>)

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls et  $\theta$  est l'angle qu'ils forment, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta).$$

La norme d'un vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  est  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .



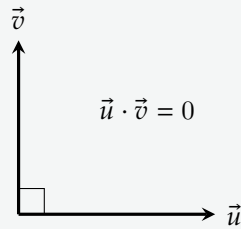
**Exemple.** Si  $\|\vec{u}\| = 4$ ,  $\|\vec{v}\| = 3$  et  $\theta = 60^\circ$ , alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 3 \times \cos(60^\circ) = 12 \times \frac{1}{2} = 6$ .

## Carré scalaire (1<sup>re</sup>)

Le produit scalaire d'un vecteur par lui-même est le carré de sa norme :  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ . En effet, l'angle est nul et  $\cos(0) = 1$ .

## Orthogonalité (1<sup>re</sup>)

Deux vecteurs non nuls sont **orthogonaux** (perpendiculaires) si et seulement si leur produit scalaire est nul :  $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ . C'est l'outil de référence pour démontrer un angle droit.



### Méthode : calculer un produit scalaire ou un angle

1. Si l'on connaît les coordonnées, utiliser  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ .
2. Si l'on connaît les normes et l'angle, utiliser  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)$ .
3. Pour trouver un angle, calculer le produit scalaire et les normes, puis isoler  $\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$ .

**Exemple.** Angle entre  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ . On calcule  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 0 + 2 \times 3 = 6$ ,  $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$  et  $\|\vec{v}\| = 3$ . Donc

$$\cos(\theta) = \frac{6}{2\sqrt{2} \times 3} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{d'où } \theta = 45^\circ.$$

**Exercice 1** *Calculer et reconnaître l'orthogonalité* Le repère est orthonormé.

1. Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  pour  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ .
2. Les vecteurs  $\vec{a} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{b} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  sont-ils orthogonaux?

**Exercice 2** *Orthogonalité et angle*

1. Déterminer le réel  $t$  pour que  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  soient orthogonaux.
2. Calculer une valeur approchée, au degré près, de l'angle entre  $\vec{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{b} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 3** *Synthèse (4 points)* Dans un repère orthonormé, on donne A(1 ; 2), B(5 ; 3) et C(0 ; 6).

1. Calculer les coordonnées de  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ .
2. Calculer  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .
3. En déduire la nature du triangle ABC.

## Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Croire que $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un vecteur	« $\vec{u} \cdot \vec{v}$ a des coordonnées »	c'est un nombre (un scalaire)
Multiplier les coordonnées en croix	$\vec{u} \cdot \vec{v} = xy' + yx'$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
Oublier le cosinus	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\  \times \ \vec{v}\ $	$\times \cos(\theta)$ en plus
Mal interpréter $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$	« un des vecteurs est nul »	les vecteurs sont orthogonaux

## SOLUTIONS DES EXERCICES

### Corrigé de l'exercice 1.

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-2) + 5 \times 4 = -6 + 20 = 14.$
2.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \times 2 + (-3) \times 4 = 12 - 12 = 0.$  Le produit scalaire est nul, donc  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont orthogonaux.

### Corrigé de l'exercice 2.

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 + t \times (-1) = 6 - t.$  Ils sont orthogonaux lorsque  $6 - t = 0$ , soit  $t = 6.$
2.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 + 0 \times 1 = 1,$   $\|\vec{a}\| = 1$  et  $\|\vec{b}\| = \sqrt{2}.$  Donc  $\cos(\theta) = \frac{1}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$  d'où  $\theta = 45^\circ.$

### Corrigé de l'exercice 3.

1.  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 6 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$
2.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times (-1) + 1 \times 4 = -4 + 4 = 0.$
3. Le produit scalaire est nul, donc  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont orthogonaux : le triangle ABC est **rectangle en A.**