Les probabilités conditionnelles

Une probabilité conditionnelle mesure la chance qu'un événement se produise *sachant* qu'un autre est déjà réalisé. Cette information change la donne : la probabilité d'être malade n'est pas la même avant et après un test positif. L'outil central est l'arbre pondéré, qui organise les probabilités et permet de tout calculer : probabilité d'une intersection, probabilité totale, et probabilité « à rebours ». La difficulté est de ne pas confondre $P_A(B)$ et $P_B(A)$, qui n'ont aucune raison d'être égales.

Probabilité conditionnelle (1re)

Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$. La probabilité de B **sachant** A, notée $P_A(B)$, est

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

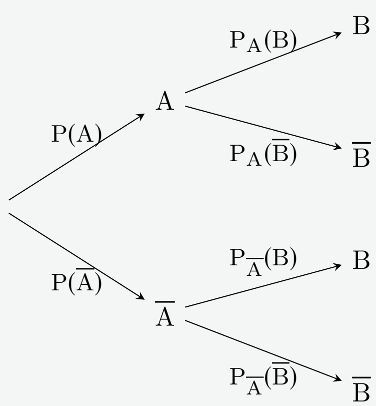
On en déduit la probabilité d'une intersection : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Exemple. On sait que $P(A) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$. Alors $P_A(B) = \dfrac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$. Sachant que A est réalisé, B a une probabilité de $0{,}4$.

Arbre pondéré (1re)

Un arbre pondéré organise une expérience à deux étapes. Sur chaque branche figure une probabilité ; les branches issues d'un même point ont une somme égale à 1. On lit deux règles :

- la probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités rencontrées le long de ce chemin ;
- la probabilité d'un événement est la **somme** des probabilités des chemins qui y mènent.



Formule des probabilités totales (1re)

Avec l'arbre ci-dessus, l'événement B est atteint par deux chemins : celui qui passe par A et celui qui passe par $\overline{A}$. D'où

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B).$$

Indépendance (1re)

Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque la réalisation de l'un ne change pas la probabilité de l'autre, c'est-à-dire $P_A(B) = P(B)$. Cela équivaut à

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Méthode : utiliser un arbre

1. Traduire l'énoncé en événements et placer les probabilités connues sur les branches.
2. Compléter les branches manquantes (la somme partant d'un point vaut 1).
3. Multiplier le long des chemins, additionner les chemins menant au même événement.

Exemple. Une urne donne A avec $P(A) = 0{,}3$. Sachant A, B a pour probabilité $0{,}8$; sachant $\overline{A}$, B a pour probabilité $0{,}5$. Alors

$$P(B) = 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}7 \times 0{,}5 = 0{,}24 + 0{,}35 = 0{,}59.$$

Exercice 1 *Conditionnelle et indépendance* On donne $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}3$.

1. Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice 2 *Construire un arbre* Dans une classe, 60 % des élèves sont des filles. Parmi les filles, 30 % jouent d'un instrument ; parmi les garçons, 20 %. On choisit un élève au hasard. On note F « l'élève est une fille » et I « l'élève joue d'un instrument ».

1. Construire l'arbre pondéré.
2. Calculer $P(F \cap I)$.
3. Calculer $P(I)$.

Exercice 3 *Synthèse* **(4 points)** Dans une usine, 4 % des pièces sont défectueuses. Un test détecte 95 % des pièces défectueuses, mais signale aussi à tort 2 % des pièces conformes. On note D « la pièce est défectueuse » et T « le test est positif ».

1. Calculer la probabilité que le test soit positif.
2. Une pièce a un test positif. Calculer la probabilité qu'elle soit réellement défectueuse, $P_T(D)$. Commenter.

Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Confondre $P_A(B)$ et $P_B(A)$	« c'est la même chose »	$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, dénominateurs différents
Additionner le long d'un chemin	$P(A \cap B) = P(A) + P_A(B)$	on multiplie : $P(A) \times P_A(B)$
Oublier un chemin dans $P(B)$	$P(B) = P(A) \times P_A(B)$	ajouter le chemin par $\overline{A}$
Croire que deux événements sont toujours indépendants	supposer $P(A \cap B) = P(A)P(B)$	à vérifier, ce n'est pas automatique

SOLUTIONS DES EXERCICES

Corrigé de l'exercice 1.

1. $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5$ et $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$.
2. On compare $P(A) \times P(B) = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3$ et $P(A \cap B) = 0{,}3$. Ils sont égaux, donc A et B sont **indépendants** (on remarque d'ailleurs que $P_A(B) = 0{,}5 = P(B)$).

Corrigé de l'exercice 2.

1. L'arbre a deux branches principales F (probabilité $0{,}6$) et $\overline{F}$ (probabilité $0{,}4$). De F partent I $(0{,}3)$ et $\overline{I}$ $(0{,}7)$; de $\overline{F}$ partent I $(0{,}2)$ et $\overline{I}$ $(0{,}8)$.
2. $P(F \cap I) = P(F) \times P_F(I) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$.
3. $P(I) = P(F) \times P_F(I) + P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(I) = 0{,}18 + 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}18 + 0{,}08 = 0{,}26$.

Corrigé de l'exercice 3.

1. $P(D) = 0{,}04$, $P(\overline{D}) = 0{,}96$, $P_D(T) = 0{,}95$, $P_{\overline{D}}(T) = 0{,}02$.
   $P(T) = 0{,}04 \times 0{,}95 + 0{,}96 \times 0{,}02 = 0{,}038 + 0{,}0192 = 0{,}0572$.
2. $P_T(D) = \dfrac{P(D \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}04 \times 0{,}95}{0{,}0572} = \dfrac{0{,}038}{0{,}0572} \approx 0{,}66$.
   Même avec un test positif, la pièce n'a qu'environ $66\ \%$ de chances d'être défectueuse : les fausses alertes sur les nombreuses pièces conformes pèsent lourd. C'est pourquoi $P_T(D)$ et $P_D(T)$ sont très différents.