Prérequis pour entrer en terminale

Cette fiche teste les acquis de première indispensables pour aborder la terminale sereinement. Essaie chaque exercice **sans ton cours**, note tes réponses au brouillon, puis consulte les solutions en fin de fiche. Si tu bloques, c'est le signe qu'il faut reprendre le point correspondant avant d'aller plus loin.

Réussi sans hésitation : passe au suivant. **Réussi avec hésitation** : fais deux exercices supplémentaires pour consolider. **Échoué** : retravaille la leçon correspondante avant de poursuivre.

1 SECOND DEGRÉ

1. Résoudre $2x^2 - 5x + 3 = 0$ à l'aide du discriminant.
2. Factoriser $2x^2 - 5x + 3$.
3. Étudier le signe de $-x^2 + 4x - 3$ sur $\mathbb{R}$.

2 DÉRIVATION

1. Calculer la dérivée de $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 7$.
2. Calculer la dérivée de $g(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ pour $f(x) = x^3 - 3x$ et dresser le tableau de variations de f.

3 SUITES

1. (u_n) est définie par $u_n = 3n - 7$. Calculer u_0, u_1, u_5. Quelle est la nature de cette suite ? Préciser ses éléments caractéristiques.
2. (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison $q = 2$. Exprimer v_n en fonction de n et calculer v_6.
3. (w_n) est définie par $w_0 = 3$ et $w_{n+1} = 2w_n - 1$. Calculer w_1, w_2, w_3. La suite est-elle arithmétique ? géométrique ?

4 FONCTION EXPONENTIELLE

1. Simplifier $\mathrm{e}^{3x} \times \mathrm{e}^{-x}$.
2. Résoudre $\mathrm{e}^{2x-1} = \mathrm{e}^5$.
3. Résoudre $\mathrm{e}^x > 1$.

5 PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

1. Dans une usine, $5\,\%$ des pièces sont défectueuses. Un test de contrôle détecte $90\,\%$ des pièces défectueuses, mais donne aussi une fausse alerte pour $3\,\%$ des pièces conformes. On choisit une pièce au hasard.
   a) Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
   b) Calculer la probabilité que le test soit positif.
2. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Sachant que la carte tirée est rouge, quelle est la probabilité que ce soit un as ?

6 PRODUIT SCALAIRE

1. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$. Les vecteurs sont-ils orthogonaux ?
2. Dans un triangle ABC avec $AB = 5$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 60$ř, calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

SOLUTIONS

1. Second degré

1. $a = 2$, $b = -5$, $c = 3$. $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{5-1}{4} = 1$ et $x_2 = \dfrac{5+1}{4} = \dfrac{3}{2}$.
   L'ensemble des solutions est $\left\{1\,;\,\dfrac{3}{2}\right\}$.
2. Comme $\Delta > 0$, $2x^2 - 5x + 3 = 2(x-1)\left(x - \dfrac{3}{2}\right) = (x-1)(2x-3)$.
3. $a = -1$, $b = 4$, $c = -3$. $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-4-2}{-2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{-4+2}{-2} = 1$.
   Comme $a = -1 < 0$, le trinôme est positif entre les racines :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-x^2 + 4x - 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Si tu échoues : reprends le discriminant ($\Delta = b^2 - 4ac$), les formules des racines, la factorisation $a(x - x_1)(x - x_2)$, et la règle du signe (même signe que a à l'extérieur des racines, signe contraire entre les racines).

2. Dérivation

1. $f'(x) = 9x^2 - 4x + 1$.
2. On applique $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$, $v(x) = x^2 - 3$, $v'(x) = 2x$.
   $g'(x) = 2(x^2 - 3) + (2x + 1)(2x) = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x - 6$.
3. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

$f(-1) = -1 + 3 = 2$ et $f(1) = 1 - 3 = -2$.

Si tu échoues aux exercices 1 ou 2 : reprends les formules de dérivation ($x^n \to nx^{n-1}$) et la formule du produit. Si tu échoues à l'exercice 3 : reprends la méthode complète : dériver, factoriser la dérivée, dresser le tableau de signes avec les facteurs, puis le tableau de variations.

3. Suites

1. $u_0 = -7$, $u_1 = -4$, $u_5 = 8$. On vérifie : $u_1 - u_0 = 3$, $u_5 - u_4 = 8 - 5 = 3$. La suite est arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = -7$.
2. $v_n = v_0 \times q^n = 5 \times 2^n$. Donc $v_6 = 5 \times 2^6 = 5 \times 64 = 320$.
3. $w_1 = 2 \times 3 - 1 = 5$, $w_2 = 2 \times 5 - 1 = 9$, $w_3 = 2 \times 9 - 1 = 17$.
   $w_1 - w_0 = 2$ et $w_2 - w_1 = 4$: la différence n'est pas constante, la suite n'est pas arithmétique.
   $\dfrac{w_1}{w_0} = \dfrac{5}{3}$ et $\dfrac{w_2}{w_1} = \dfrac{9}{5}$: le quotient n'est pas constant, la suite n'est pas géométrique.

Si tu échoues : reprends les définitions et formules explicites des suites arithmétiques ($u_n = u_0 + nr$) et géométriques ($v_n = v_0 \times q^n$), ainsi que la différence entre formule explicite et formule de récurrence.

4. Fonction exponentielle

1. $\mathrm{e}^{3x} \times \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{3x+(-x)} = \mathrm{e}^{2x}$.
2. La fonction exponentielle est strictement croissante, donc $\mathrm{e}^{a} = \mathrm{e}^{b} \iff a = b$.
   $\mathrm{e}^{2x-1} = \mathrm{e}^{5} \iff 2x - 1 = 5 \iff x = 3$.
3. $\mathrm{e}^{x} > 1 \iff \mathrm{e}^{x} > \mathrm{e}^{0} \iff x > 0$ (car la fonction exponentielle est strictement croissante).
   L'ensemble des solutions est $]0\,;\,+\infty[$.

Si tu échoues : reprends les propriétés algébriques de l'exponentielle ($\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^{a} \times \mathrm{e}^{b}$) et le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante et toujours positive.

5. Probabilités conditionnelles

1. Soit D l'événement « la pièce est défectueuse » et T l'événement « le test est positif ».
   On a : $P(D) = 0{,}05$, $P(\overline{D}) = 0{,}95$, $P_D(T) = 0{,}90$, $P_{\overline{D}}(T) = 0{,}03$.
   a) L'arbre pondéré a deux branches principales (D et $\overline{D}$), chacune se subdivisant en T et $\overline{T}$.
   b) D'après la formule des probabilités totales :
      $P(T) = P(D) \times P_D(T) + P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(T) = 0{,}05 \times 0{,}90 + 0{,}95 \times 0{,}03 = 0{,}045 + 0{,}0285 = 0{,}0735$.
2. Un jeu de 32 cartes contient 16 cartes rouges, dont 2 as (as de cœur et as de carreau).
   $P_R(\text{as}) = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$.

Si tu échoues : reprends les arbres pondérés (chaque branche porte une probabilité conditionnelle, le produit des branches donne la probabilité de l'intersection) et la formule des probabilités totales.

6. Produit scalaire

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + (-1) \times 5 = 6 - 5 = 1$.
   $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$, donc les vecteurs ne sont **pas** orthogonaux.
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 5 \times 4 \times \cos(60$ř$) = 20 \times \dfrac{1}{2} = 10$.

Si tu échoues : reprends les deux formules du produit scalaire : avec les coordonnées ($xx' + yy'$) et avec les normes et l'angle ($\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$). Retiens que deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.