Obstacles et approches recommandées

Synthèse de la recherche en didactique des mathématiques pour les douze fiches « Je reprends les bases »

Cette fiche recense, pour chacune des douze fiches « Je reprends les bases » (complétée par une section sur les nombres décimaux, traités en amont des fractions), les principaux obstacles d'apprentissage identifiés par la recherche en didactique des mathématiques, ainsi que les approches pédagogiques recommandées pour les surmonter. Chaque section cite ses sources afin de permettre un approfondissement. Les travaux mobilisés couvrent la littérature francophone (IREM, IFÉ, éduscol, thèses HAL) et internationale (*Educational Studies in Mathematics*, *Learning and Instruction*, PME, ZDM).

1 NOMBRES DÉCIMAUX

Obstacles identifiés par la recherche

Obstacle du prolongement des entiers : les élèves appliquent aux décimaux les propriétés des entiers naturels. Par exemple, ils croient que « plus un nombre a de chiffres, plus il est grand » (donc $3{,}124 > 3{,}7$) ou que « $0{,}6 < 0{,}45$ car $6 < 45$ » (Steinle et Stacey, 1998).

Absence de densité : pour un élève, après $1{,}5$ vient $1{,}6$, et il n'y a rien entre les deux. C'est l'application indue de la notion de « successeur » propre aux entiers (Brousseau, 1981).

Le « zéro inutile » : l'élève considère que $3{,}50 \neq 3{,}5$ parce que les écritures sont différentes, ou inversement supprime des zéros significatifs dans les mesures (Resnick et al., 1989).

Virgule comme séparateur : l'élève traite le nombre décimal comme deux entiers séparés par une virgule ($3{,}7 + 2{,}5 = 5{,}12$ au lieu de $6{,}2$), la retenue ne franchissant pas la virgule (Hiebert et Wearne, 1985).

Approches recommandées

Intercalation systématique : des exercices du type « trouver un nombre décimal entre $3{,}1$ et $3{,}2$ » puis « entre $3{,}14$ et $3{,}15$ » pour construire la densité (Brousseau, 1981).

Droite graduée avec zooms successifs : graduer entre 3 et 4, puis zoomer entre $3{,}1$ et $3{,}2$, etc. La droite rend visible la densité et corrige l'obstacle du successeur (éduscol cycle 3).

Lien explicite décimaux/fractions : $0{,}7 = \frac{7}{10}$ et $0{,}35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$. Ce passage régulier empêche le cloisonnement entre les deux écritures (Brousseau et Brousseau, 1987).

Comparaison par alignement décimal : écrire $3{,}7$ comme $3{,}70$ pour comparer avec $3{,}45$ en imposant le même nombre de décimales, tout en expliquant pourquoi $3{,}7 = 3{,}70$ (en réponse à l'obstacle du « longer is larger » diagnostiqué par Steinle et Stacey, 1998).

Sources : Brousseau, G. (1981). *Problèmes de didactique des décimaux*. Recherches en didactique des mathématiques, 2(1), 37–127. Brousseau, G. et Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. IREM de Bordeaux. Steinle, V. et Stacey, K. (1998). *The incidence of misconceptions of decimal notation amongst students in grades 5 to 10*. Proceedings of the 21st Annual Conference of MERGA. Hiebert, J. et Wearne, D. (1985). *A model of students' decimal computation procedures*. Cognition and Instruction, 2(3–4), 175–205. Resnick, L., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S. et Peled, I. (1989). *Conceptual bases of arithmetic errors : the case of decimal fractions*. Journal for Research in Mathematics Education, 20(1), 8–27. Éduscol (2016). *Les nombres décimaux, cycle 3*.

2 NOMBRES RELATIFS

Obstacles identifiés par la recherche

Polysémie du signe moins : le symbole « – » joue trois rôles (soustraction, signe négatif, opposé) que les élèves confondent systématiquement (Vlassis, 2004).

Obstacle du prolongement des naturels : les élèves transfèrent les propriétés des entiers naturels (« soustraire rend plus petit ») aux relatifs, ce qui bloque la compréhension de $-(-3) = 3$ (Gallardo, 2002).

Modèles concrets partiellement adéquats : les modèles gain/dette ou température aident pour l'addition mais deviennent inadéquats pour la multiplication de deux négatifs.

Rejet des solutions négatives : certains élèves refusent un résultat négatif comme solution d'une équation car ils ne parviennent pas à lui donner un sens concret (Gallardo, 2002).

Approches recommandées

Enseigner les trois rôles du signe – : un schéma synthétique (soustraction / signe / opposé) dès l'introduction des relatifs, avec des exercices de tri (en réponse à la polysémie diagnostiquée par Vlassis, 2004).

Droite graduée comme modèle pivot : elle unifie les différentes situations et reste cohérente pour toutes les opérations (Hativa et Cohen, 1995, qui mobilisent la droite numérique comme modèle intuitif central dans leur dispositif d'apprentissage).

Varier les contextes concrets : températures, étages, altitude, dette/crédit, pour dépasser un seul modèle et favoriser l'abstraction.

Exercices de fluence ciblés : entraînement répété sur les opérations avec relatifs pour automatiser les règles de signes (Rosenshine, 2012, sur le principe général de la pratique régulière pour l'automatisation).

Sources : Vlassis, J. (2004). *Making sense of the minus sign or becoming flexible in « negativity »*. Learning and Instruction, 14(5), 469–484. Gallardo, A. (2002). *The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra*. Educational Studies in Mathematics, 49(2), 171–192. Hativa, N. et Cohen, D. (1995). *Self learning of negative number concepts by lower division elementary students through solving computer-provided numerical problems*. Educational Studies in Mathematics, 28(4), 401–431. Rosenshine, B. (2012). *Principles of instruction : research-based strategies that all teachers should know*. American Educator, Spring 2012, 12–19.

3 FRACTIONS

Obstacles identifiés par la recherche

Conception « deux entiers accolés » : l'élève traite numérateur et dénominateur comme deux nombres indépendants, ce qui produit l'erreur $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ (Stafylidou et Vosniadou, 2004 ; Ni et Zhou, 2005).

Multiplicité des interprétations : partie d'un tout, quotient, rapport, opérateur, mesure : les élèves ne naviguent pas entre ces sens (Kieren, 1993).

Interférence des règles entières : « plus le dénominateur est grand, plus la fraction est grande », par analogie avec les entiers (Stafylidou et Vosniadou, 2004).

Fractions équivalentes : l'idée qu'un même nombre puisse s'écrire de façons différentes est contre-intuitive (Kerslake, 1986).

Perte de l'unité de référence : les élèves qui réussissent dans les situations de partage échouent dès qu'il faut comparer des fractions portant sur des unités différentes ($\frac{1}{2}$ d'une petite pizza vs $\frac{1}{4}$ d'une grande), car ils traitent la fraction sans rattacher le tout à une même référence (Steffe, 2004).

Approches recommandées

Partir du partage et de la mesure : situations de partage inégal puis graduation d'une droite pour construire la fraction comme nombre (Brousseau et Brousseau, 1987 ; éduscol cycle 3).

Travailler la fraction comme quotient très tôt : $\frac{3}{4}$ est aussi $3 \div 4$, ce qui permet de vérifier à la calculatrice et de faire le lien décimaux/fractions (éduscol cycle 3 ; Coulange et Train, 2024).

Représentations multiples : aire, droite graduée, bandes de papier, pour dépasser le seul modèle « camembert » souvent réducteur (Cramer, Post et delMas, 2002).

Comparer avant de calculer : des exercices de comparaison et d'encadrement aident à construire le sens du nombre avant l'algorithmique (en réponse au *whole number bias* diagnostiqué par Ni et Zhou, 2005).

Itération de l'unité fractionnaire : construire $\frac{3}{4}$ comme « 3 fois $\frac{1}{4}$ » aide à contrer la conception « deux entiers accolés » et ancre la fraction dans un processus de mesure (Steffe, 2004).

Sources : Brousseau, G. et Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. IREM de Bordeaux. Kieren, T. (1993). *Rational and fractional numbers : from quotient fields to recursive understanding*. In T. Carpenter, E. Fennema et T. Romberg (Eds.), *Rational numbers : an integration of research*. Erlbaum. Stafylidou, S. et Vosniadou, S. (2004). *The development of students' understanding of the numerical value of fractions*. Learning and Instruction, 14(5), 503–518. Steffe, L.P. (2004). *On the construction of learning trajectories of children : the case of commensurate fractions*. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 129–162. Coulange, L. et Train, G. (2024). *Fraction à l'école primaire en France : un « objet » à (re)questionner ?* Annales de didactique et de sciences cognitives, 29, 65–119. Éduscol (2016). *Fractions et nombres décimaux au cycle 3*. Kerslake, D. (1986). *Fractions : children's strategies and errors*. NFER-Nelson. Cramer, K., Post, T. et delMas, R. (2002). *Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students : a comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the Rational Number Project curriculum*. Journal for Research in Mathematics Education, 33(2), 111–144. Ni, Y. et Zhou, Y.-D. (2005). *Teaching and learning fraction and rational numbers : the origins and implications of whole number bias*. Educational Psychologist, 40(1), 27–52.

4 CALCUL LITTÉRAL

Obstacles identifiés par la recherche

La lettre comme étiquette : l'élève lit « a » comme l'abréviation d'un mot (a = abricot) plutôt que comme un nombre inconnu (Küchemann, 1981 ; Booth, 1989).

Concaténation arithmétique : « $3a$ » est lu comme « 31 » quand $a = 1$, par analogie avec la numération de position (Kieran, 1992).

Besoin de clôture : l'élève ne tolère pas une expression non réduite ($3x + 2$ « n'est pas fini ») et simplifie abusivement en $5x$ (Collis, 1975).

Absence de sens du signe égal : en arithmétique, = signifie « donne le résultat » ; en algèbre, c'est une relation d'équivalence. Or la compréhension relationnelle du signe = est le prédicteur le plus fiable de la réussite en algèbre au secondaire (Kieran, 1981 ; Knuth et al., 2006).

La lettre-objet fixe : l'élève croit que deux lettres différentes désignent nécessairement des valeurs différentes : si $a + b = 10$, alors a et b « ne peuvent pas valoir 5 tous les deux » (Küchemann, 1981).

Approches recommandées

Programmes de calcul : l'élève vérifie avec des nombres puis généralise, ce qui donne un sens fonctionnel à la variable (éduscol cycle 4).

Double distributivité avec les aires : le rectangle d'aire $(a + b)(c + d)$ donne un sens géométrique au développement.

Substitution intensive : vérifier une égalité par substitution numérique renforce le sens de la lettre comme nombre (Kieran, 2007).

Expliciter le rôle du signe égal : des exercices « vrai/faux » du type $3 + 5 = \square + 2$ dès le cycle 3 (Carpenter, Franke et Levi, 2003).

Sources : Küchemann, D. (1981). *Algebra*. In K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics : 11–16*. John Murray. Kieran, C. (1992). *The learning and teaching of school algebra*. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Macmillan. Kieran, C. (2007). *Learning and teaching algebra at the middle school through college levels : building meaning for symbols and their manipulation*. In F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Information Age. Booth, L. (1989). *A question of structure*. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra*. Erlbaum. Carpenter, T.P., Franke, M.L. et Levi, L. (2003). *Thinking mathematically : integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann. Knuth, E.J., Stephens, A.C., McNeil, N.M. et Alibali, M.W. (2006). *Does understanding the equal sign matter ? Evidence from solving equations*. Journal for Research in Mathematics Education, 37(4), 297–312. Collis, K. (1975). *The development of formal reasoning*. University of Newcastle, Report to SSRC.

5 ÉQUATIONS

Obstacles identifiés par la recherche

Le signe égal comme opérateur : les élèves lisent $3x + 5 = 20$ comme « $3x + 5$ font 20 » et ne savent pas manipuler les deux membres symétriquement (Kieran, 1981).

Le modèle de la balance, une aide limitée : la balance aide pour les équations à coefficients positifs mais bloque dès que des termes négatifs apparaissent (Vlassis, 2002).

Inversion mécanique : « changer de côté, changer de signe » sans comprendre la justification algébrique (Filloy et Rojano, 1989).

Coefficients négatifs ou fractionnaires : leur présence augmente considérablement le taux d'erreur (Lindström et al., 2024).

Approches recommandées

Équations-problèmes : un problème contextuel donne du sens à l'inconnue avant l'introduction de la technique formelle (Filloy et Rojano, 1989).

Principe d'équivalence : « on fait la même chose des deux côtés », visualisé sur la balance puis généralisé, en gardant à l'esprit les limites du modèle dès l'apparition de coefficients négatifs (Vlassis, 2002).

Vérification systématique : substituer la solution dans l'équation de départ pour valider ou invalider (éduscol cycle 4).

Progression dans le choix des nombres : commencer avec des solutions entières positives, puis introduire négatifs et fractions (en réponse à l'effet diagnostiqué par Lindström et al., 2024).

Sources : Vlassis, J. (2002). *The balance model : hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown*. Educational Studies in Mathematics, 49(3), 341–359. Filloy, E. et Rojano, T. (1989). *Solving equations : the transition from arithmetic to algebra*. For the Learning of Mathematics, 9(2), 19–25. Kieran, C. (1981). *Concepts associated with the equality symbol*. Educational Studies in Mathematics, 12(3), 317–326. Lindström, M. et al. (2024). *How numbers influence students when solving linear equations*. Mathematical Thinking and Learning, 27(3), 305–322.

⑥ FONCTIONS

Obstacles identifiés par la recherche

Confusion variation/valeur : l'élève confond « la fonction augmente » et « la fonction est positive » (Leinhardt, Zaslavsky et Stein, 1990, sur la *slope-height confusion*).

***Concept-image* vs *concept-définition* :** l'image mentale de « fonction = courbe continue et lisse » exclut les fonctions définies par morceaux ou les constantes (Tall et Vinner, 1981).

Cloisonnement des registres : les trois registres de représentation (numérique, graphique, algébrique) ne sont pas spontanément reliés (Duval, 1993).

Lecture graphique inversée : lire l'antécédent d'une image sur un graphique est significativement plus difficile que lire l'image d'un antécédent (Leinhardt et al., 1990).

Conception purement procédurale : l'élève voit la fonction comme un « processus de calcul » (une machine) mais ne parvient pas à la concevoir comme un objet mathématique manipulable. Ce passage du processus à l'objet (réification) est un saut cognitif majeur (Sfard, 1991).

Variable muette : l'élève croit que $f(x)$ et $f(t)$ définissent deux fonctions différentes, car il attache un sens à la lettre utilisée au lieu de comprendre que la variable est un simple « espace réservé » (sur la rigidité des images de concept attachées à la notation, voir Vinner, 1983).

Approches recommandées

Articuler les trois registres : tout exercice devrait solliciter au moins deux registres pour forcer la conversion (Duval, 1993).

Contextes de co-variation : des situations où deux grandeurs varient ensemble (distance/temps, prix/quantité) donnent sens à la dépendance fonctionnelle avant la notation $f(x)$ (Thompson et Carlson, 2017).

Lecture graphique guidée : des exercices progressifs (image, antécédent, extremums, signe, variation) avec traçage à la main (éduscol cycle 4).

Faire varier la lettre de la variable : utiliser $f(x)$, $f(t)$, $f(n)$ pour une même fonction afin de désensibiliser l'élève au choix de la lettre et de construire la notion de variable muette.

Sources : Tall, D. et Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12(2), 151–169. Vinner, S. (1983). *Concept definition, concept image and the notion of function*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14(3), 293–305. Sfard, A. (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Educational Studies in Mathematics, 22(1), 1–36. Duval, R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de didactique et de sciences cognitives, 5, 37–65. Thompson, P.W. et Carlson, M.P. (2017). *Variation, covariation, and functions : foundational ways of thinking mathematically*. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). NCTM. Leinhardt, G., Zaslavsky, O. et Stein, M.K. (1990). *Functions, graphs, and graphing : tasks, learning, and teaching*. Review of Educational Research, 60(1), 1–64.

⑦ PUISSANCES

Obstacles identifiés par la recherche

Confusion puissance/multiplication : 2^3 est lu comme $2 \times 3 = 6$ au lieu de $2 \times 2 \times 2 = 8$ (Pitta-Pantazi, Christou et Zachariades, 2007).

Généralisation abusive : $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, par analogie avec la distributivité simple, et $a^{-1} = -a$ (Matz, 1982).

Exposants nul et négatif : $a^0 = 1$ est jugé « arbitraire » car l'élève ne voit pas la logique de la convention (Matz, 1982).
Signe et puissance : confondre $(-2)^2 = 4$ et $-2^2 = -4$ est l'erreur la plus fréquente (Weber, 2002).

Approches recommandées

Écriture répétée : déplier systématiquement a^n en produits pour ancrer le sens avant de manipuler les règles (en réponse aux niveaux de compréhension diagnostiqués par Pitta-Pantazi, Christou et Zachariades, 2007).
Justifier a^0 et a^{-n} par le pattern : la suite $2^3 = 8$, $2^2 = 4$, $2^1 = 2$, $2^0 =?$, on divise par 2 à chaque étape, ce qui rend la convention nécessaire.
Distinguer $(-2)^2$ de -2^2 : des exercices de classement vrai/faux avec parenthèses.

Sources : Pitta-Pantazi, D., Christou, C. et Zachariades, T. (2007). *Secondary school students' levels of understanding in computing exponents*. The Journal of Mathematical Behavior, 26(4), 301–311. Matz, M. (1982). *Towards a process model for high school algebra errors*. In D. Sleeman & J.S. Brown (Eds.), *Intelligent tutoring systems*. Academic Press. Weber, K. (2002). *Developing students' understanding of exponents and logarithms*. ERIC Document ED471763.

8 THÉOREME DE PYTHAGORE

Obstacles identifiés par la recherche

Formule sans sens géométrique : les élèves mémorisent $a^2+b^2 = c^2$ sans comprendre qu'il s'agit de sommes d'aires de carrés construits sur les côtés (De Villiers, 2009).
Identification de l'hypoténuse : quand le triangle est orienté de manière non standard (hypoténuse verticale, oblique, en bas de la figure), les élèves peinent à identifier le côté opposé à l'angle droit (éduscol cycle 4).
Racine carrée mal comprise : l'élève s'arrête à $c^2 = a^2 + b^2$ sans extraire la racine, ou écrit $c = a^2 + b^2$ directement (Hart, 1981).
Confusion direct/réciproque : les élèves utilisent le théorème direct pour prouver qu'un triangle est rectangle, ou appliquent la réciproque pour calculer une longueur (éduscol cycle 4).
Triplets pythagoriciens mémorisés sans vigilance : l'élève conclut qu'un triangle $(3\,;\,4\,;\,6)$ est rectangle parce qu'il « commence par 3 et 4 », par analogie avec le triplet $(3\,;\,4\,;\,5)$.

Approches recommandées

Démonstration visuelle par les aires : découper et recomposer des carrés pour montrer la relation $a^2+b^2 = c^2$ concrètement. Le puzzle de Périgal ou la configuration du carré $(a+b)^2$ décomposé en quatre triangles et un carré central donnent du sens géométrique à la formule (De Villiers, 2009).
Varier l'orientation des triangles : ne jamais présenter le triangle rectangle toujours dans la même position, proposer des figures où l'hypoténuse n'est pas en bas (éduscol cycle 4).
Distinguer explicitement direct et réciproque : nommer à chaque application quelle version du théorème est mobilisée, et insister sur la structure logique (« on suppose ... donc ... » pour le direct, « on observe l'égalité ... donc le triangle est rectangle » pour la réciproque).
Contre-exemples systématiques : proposer des triangles non rectangles dont les côtés ressemblent à des triplets pythagoriciens pour travailler la vigilance ($(3\,;\,4\,;\,6)$, $(5\,;\,12\,;\,14)$).

Sources : De Villiers, M. (2009). *Some adventures in Euclidean geometry*. Dynamic Mathematics Learning. Éduscol (2016). *Espace et géométrie : ressources cycle 4*. Hart, K.M. (Ed.) (1981). *Children's understanding of mathematics : 11–16*. John Murray.

9 THÉORÈME DE THALÈS

Obstacles identifiés par la recherche

Dépendance aux figures prototypes : les élèves ne reconnaissent la configuration de Thalès que dans les figures archétypes (triangle standard, sécantes partant du sommet en haut). Dès qu'on sort du prototype (configuration « papillon », triangle retourné, sommet à droite), les erreurs se multiplient. Laguerre (2005) appelle « figures pathogènes » les figures qui, sans être incorrectes, ne sont pas reconnues comme relevant du théorème.

Inversion des rapports : écrire $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$ au lieu de $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, c'est-à-dire mélanger les longueurs portées par les deux sécantes. Cette erreur touche la majorité des élèves en début d'apprentissage (Laguerre, 2005).

Oubli des conditions d'application : les élèves appliquent le théorème sans vérifier ni l'alignement des points ni le parallélisme des droites ; le raisonnement devient mécanique.

Confusion direct/réciproque : comme pour Pythagore, les élèves mobilisent le théorème direct pour prouver un parallélisme, ou la réciproque pour calculer une longueur.

Introduction ostensive : dans l'enseignement ordinaire, le théorème est souvent introduit par une figure « à regarder » sans problème motivant. Cette approche ostensive prive le théorème de son sens fonctionnel (calculer une distance inaccessible) et rend l'apprentissage plus fragile (Laguerre, 2005).

Confusion avec la similitude ou le parallélisme seul : certains élèves concluent au parallélisme dès qu'ils observent des « triangles de même forme », sans contrôler l'égalité des rapports.

Approches recommandées

Introduire par un problème motivant : mesurer une distance inaccessible (largeur d'une rivière, hauteur d'un immeuble) en utilisant des alignements dans le méso-espace donne un sens fonctionnel au théorème avant sa formalisation (Laguerre, 2005).

Varier systématiquement les configurations : présenter les deux configurations (triangle et papillon) dès le début, dans des positions et orientations variées, pour contrer la dépendance aux prototypes.

Rédaction-type à apprendre : imposer une structure de rédaction stable (identifier le sommet commun, citer les points alignés, justifier le parallélisme, écrire les trois rapports, choisir les deux utiles) transforme une manipulation fragile en procédure robuste.

Distinguer explicitement direct, réciproque et contraposée : associer chacun des trois énoncés à un usage ciblé : calculer une longueur (direct), prouver un parallélisme (réciproque), prouver un non-parallélisme (contraposée).

Articuler les registres figural et discursif : alterner figure géométrique et écriture des rapports (tableau de proportionnalité, égalités numériques) pour rendre explicite le passage de la configuration au calcul (Duval, 2005, sur la coordination de la visualisation et du raisonnement en géométrie).

Sources : Laguerre, É. (2005). *Une ingénierie didactique pour l'apprentissage du théorème de Thalès au collège*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot. HAL tel-00337891. Duval, R. (2005). *Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements*. Annales de didactique et de sciences cognitives, 10, 5–53.

(10) TRIGONOMÉTRIE DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

Obstacles identifiés par la recherche

Confusion des trois rapports : sin, cos, tan sont perçus comme des « formules à appliquer » sans lien avec le rapport de longueurs. L'élève ne sait pas quel rapport utiliser selon les données disponibles (Weber, 2005).

Dépendance à l'angle aigu de référence : les élèves fixent mentalement un angle (souvent celui du bas à gauche) et ne redéfinissent pas systématiquement l'opposé et l'adjacent quand l'angle change.

sin et cos vus comme des fonctions sans domaine : l'élève ne perçoit pas que, pour un angle aigu, $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ sont nécessairement dans $[0\,;\,1]$: un résultat supérieur à 1 ne déclenche pas d'alerte (Weber, 2005).

Invariance par similitude non perçue : les élèves ne comprennent pas *pourquoi* les rapports ne dépendent que de l'angle et non de la taille du triangle. Cette propriété est pourtant le cœur conceptuel de la trigonométrie (Moore, 2014).

Confusion degrés/radians sur la calculatrice : erreur de mode provoquant des valeurs aberrantes, non détectées faute de contrôle.

Approches recommandées

Approche par similitude : faire mesurer à la main plusieurs triangles rectangles ayant un angle de $30°$ et constater que le rapport opposé/hypoténuse est toujours le même. C'est l'origine historique et conceptuelle des rapports trigonométriques (Moore, 2014, sur la nécessité de fonder le sinus sur un raisonnement d'invariance par similitude).

SOH-CAH-TOA accompagné du schéma : le moyen mnémotechnique ne suffit pas ; il doit être associé à un schéma explicite du triangle avec l'angle mis en évidence (éduscol cycle 4).

Exercices de classification : à partir d'une figure, demander « quel rapport utiliser ? » sans calculer, pour travailler l'étape de reconnaissance (en réponse aux difficultés diagnostiquées par Weber, 2005, dont l'approche expérimentale fondée sur le *procept* privilégie la compréhension conceptuelle).

Contrôle de vraisemblance systématique : imposer la vérification $\sin(\alpha) \leqslant 1$ et $\cos(\alpha) \leqslant 1$, et la cohérence du résultat ($\tan(45°) = 1$, $\sin(30°) = \frac{1}{2}$).

Relation fondamentale comme outil de contrôle : $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha) = 1$, conséquence directe de Pythagore, sert autant à établir des valeurs qu'à vérifier un résultat.

Sources : Weber, K. (2005). *Students' understanding of trigonometric functions*. Mathematics Education Research Journal, 17(3), 91–112. Moore, K.C. (2014). *Quantitative reasoning and the sine function : the case of Zac*. Journal for Research in Mathematics Education, 45(1), 102–138. Éduscol (2016). *Espace et géométrie : ressources cycle 4*.

(11) PROPORTIONNALITÉ

Obstacles identifiés par la recherche

Illusion de linéarité (obstacle additif) : les élèves appliquent un raisonnement additif (« +3 partout ») au lieu du coefficient multiplicatif, surtout dans les agrandissements (De Bock et al., 2007).

Application aveugle : tout problème à deux grandeurs est traité comme proportionnel, même quand la situation ne l'est pas (Modestou et Gagatsis, 2007).

Produit en croix mécanique : utilisé sans compréhension de la propriété $f(kx) = kf(x)$ (Vergnaud, 1983).

Approches recommandées

Varier les procédures : retour à l'unité, coefficient, propriété additive, propriété multiplicative. Ne pas se limiter au produit en croix (Vergnaud, 1983 ; éduscol).

Situations de non-proportionnalité : proposer des contre-exemples pour apprendre à reconnaître quand la proportionnalité ne s'applique pas (De Bock et al., 2007).

Ancrage dans les grandeurs physiques : vitesse, prix au kilo, échelle, concentration : des contextes variés pour éviter un traitement purement numérique (éduscol cycle 4).

Sources : Vergnaud, G. (1983). *Multiplicative structures*. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127–174). Academic Press. De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. et Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity : from analysis to improvement*. Springer. Modestou, M. et Gagatsis, A. (2007). *Students' improper proportional reasoning : a result of the epistemological obstacle of "linearity"*. Educational Psychology, 27(1), 75–92. Éduscol (2016). *Proportionnalité : ressources cycle 4*.

12 REPÉRAGE DANS LE PLAN

Obstacles identifiés par la recherche

Inversion abscisse/ordonnée : les élèves confondent l'ordre des coordonnées $(x\ ;\ y)$, surtout quand la convention « horizontal d'abord » n'est pas intériorisée (sur le développement progressif du raisonnement spatial, voir Sarama et Clements, 2009).

Coordonnées négatives : placer un point dans les quadrants II, III ou IV est nettement plus difficile que dans le quadrant I. L'obstacle des relatifs se cumule (Hativa et Cohen, 1995).

Graduation non unité : quand le pas de graduation n'est pas 1, les élèves comptent les graduations au lieu de lire les valeurs (Leinhardt et al., 1990).

Approches recommandées

Mnémotechniques explicites : « abscisse = axe horizontal », travail kinesthésique (marcher le long de l'axe) pour ancrer l'ordre $(x\ ;\ y)$.

Repérage sur droite graduée d'abord : maîtriser le repérage à une dimension (nombres relatifs) avant d'étendre à deux dimensions (en cohérence avec la trajectoire d'apprentissage spatiale décrite par Sarama et Clements, 2009).

Placement et lecture combinés : alterner « placer un point donné par ses coordonnées » et « lire les coordonnées d'un point placé » avec des graduations variées (éduscol cycle 4).

Sources : Sarama, J. et Clements, D.H. (2009). *Early childhood mathematics education research*. Routledge. Hativa, N. et Cohen, D. (1995). *Self learning of negative number concepts by lower division elementary students through solving computer-provided numerical problems*. Educational Studies in Mathematics, 28(4), 401–431. Leinhardt, G., Zaslavsky, O. et Stein, M.K. (1990). *Functions, graphs, and graphing : tasks, learning, and teaching*. Review of Educational Research, 60(1), 1–64.

13 PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Obstacles identifiés par la recherche

Équiprobabilité abusive : les élèves considèrent spontanément que tous les résultats d'une expérience aléatoire sont équiprobables. Par exemple, lancer deux dés et obtenir une somme de 7 ou de 12 sont jugés « aussi probables » (Lecoutre, 1992).

Biais de représentativité : un résultat qui « ressemble » à du hasard est jugé plus probable qu'un résultat régulier. La suite « PFPPFP » (Pile, Face) est jugée plus vraisemblable que « PPPPPP » alors qu'elles sont équiprobables (Kahneman et Tversky, 1972).

Confusion fréquence/probabilité : les élèves ne font pas le lien entre la fréquence observée sur de nombreuses répétitions et la probabilité théorique. Un événement de probabilité $0{,}01$ est traité comme « impossible » (Fischbein, 1975).

Moyenne comme valeur typique : les élèves confondent moyenne et valeur la plus fréquente (mode), et ne comprennent pas que la moyenne peut ne correspondre à aucune donnée réelle de la série (Konold, 1995).

Approches recommandées

Simulations et expériences aléatoires : lancer réellement des dés, des pièces, tirer des boules, puis comparer les fréquences observées aux probabilités théoriques. La stabilisation des fréquences rend la loi des grands nombres intuitive (Fischbein, 1975 ; éduscol cycle 4).

Dénombrement explicite des issues : construire des arbres ou des tableaux à double entrée pour visualiser l'espace des possibles et contrer l'équiprobabilité abusive (en réponse à l'obstacle diagnostiqué par Lecoutre, 1992).

Situations de non-équiprobabilité : dés truqués, urnes déséquilibrées, pour apprendre à ne pas supposer l'équiprobabilité par défaut.

Construire la moyenne par « mise à plat » : la moyenne comme « valeur qui égalise » (si on redistribue les données pour que tout le monde ait la même quantité). Cette approche par redistribution est plus robuste que la seule formule (en réponse aux conceptions diagnostiquées par Konold, 1995).

Sources : Lecoutre, M.-P. (1992). *Cognitive models and problem spaces in purely random situations*. Educational Studies in Mathematics, 23, 557–568. Kahneman, D. et Tversky, A. (1972). *Subjective probability : A judgment of representativeness*. Cognitive Psychology, 3, 430–454. Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Reidel. Konold, C. (1995). *Issues in assessing conceptual understanding in probability and statistics*. Journal of Statistics Education, 3(1).