Les nombres relatifs

Un nombre relatif est un nombre muni d'un signe : positif (+) ou négatif (−). Les nombres relatifs apparaissent partout : températures en-dessous de zéro, étages en sous-sol, comptes bancaires en négatif. Pourtant, les erreurs de signe sont la cause numéro un des fautes de calcul au collège et au lycée.

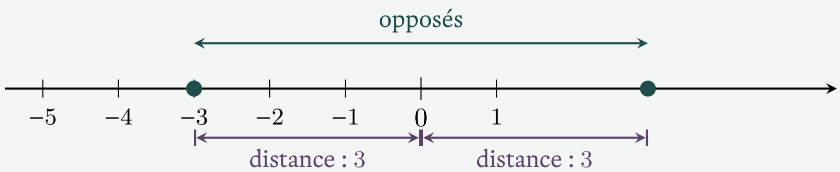
Vocabulaire (5^e)

Nombre relatif : nombre muni d'un signe (positif ou négatif). Exemples : $+3$; -7 ; $-0{,}5$. Le nombre 0 est le seul nombre à la fois positif et négatif (mais il n'est ni strictement positif, ni strictement négatif).

Opposé : l'opposé d'un nombre est le nombre situé à la même distance de zéro, mais de l'autre côté de zéro sur la droite graduée. L'opposé de -5 est $+5$; l'opposé de 3 est -3 ; l'opposé de 0 est 0.

Distance à zéro : c'est la distance entre un nombre et zéro sur la droite graduée. Elle est toujours positive. La distance à zéro de -3 est 3 ; la distance à zéro de 5 est 5.

Convention d'écriture : le signe + devant un nombre positif peut être omis. Ainsi $+3$ et 3 désignent le même nombre.



Remarque 1 (niveau lycée). La distance à zéro s'appelle la **valeur absolue**. On la note $|-3| = 3$ et $|3| = 3$.

Attention : le signe − a trois significations (5^e)

Le signe − peut désigner trois choses différentes selon le contexte. Les confondre est la première source d'erreurs sur les nombres relatifs.

une opération	fait partie du nombre	transforme un nombre
Soustraction $5 - 3$	**Signe** le nombre -7	**Opposé** l'opposé de 3 est -3

Dans l'expression $5 - (-3)$, on retrouve deux de ces rôles : le premier − est une soustraction (une opération) et le second fait partie du nombre -3 (un signe). Savoir les distinguer est indispensable pour appliquer les règles de calcul qui suivent.

Exercice 1 *Comparer et ranger (5^e)* **(3 points)**

1. Ranger dans l'ordre croissant : -7 ; 3 ; -1 ; 0 ; -3 ; 5 ; -10.
2. Compléter avec < ou > :

   a) $-5 \dots 2$ b) $-3 \dots -8$ c) $0 \dots -1$ d) $-4{,}5 \dots -4$

3. Quel est l'opposé de chaque nombre : -6 ; $+4$; 0 ; $-0{,}5$?

Addition et soustraction (5^e)

Additionner deux nombres de même signe : on additionne les nombres sans leur signe, puis on met le signe commun.

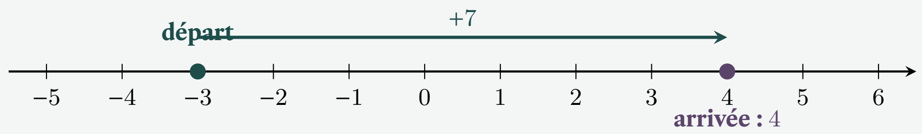
Exemple. $(-3) + (-5)$. On calcule $3 + 5 = 8$. Les deux nombres sont négatifs, le résultat est donc -8.

Additionner deux nombres de signes différents : on calcule la différence des nombres sans leur signe (le plus grand moins le plus petit), puis on met le signe du nombre ayant la plus grande distance à zéro.

Exemple. $(-3) + 7$. On calcule $7 - 3 = 4$. La plus grande distance à zéro est 7 (celle du terme $+7$, positif), le résultat est donc $+4$.

Soustraire un nombre : soustraire un nombre, c'est additionner son opposé.

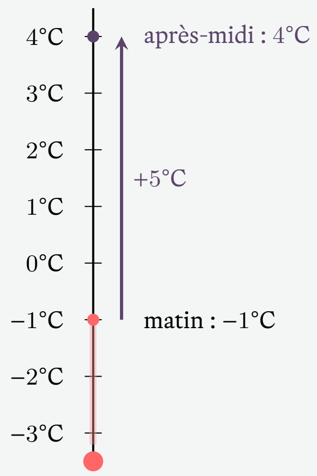
- $a - b = a + (\text{opposé de } b)$: par exemple, $5 - 8 = 5 + (-8) = -3$;
- $a - (-b) = a + (+b) = a + b$: par exemple, $5 - (-3) = 5 + (+3) = 5 + 3 = 8$.



Calcul $(-3) + 7 = 4$: on part de -3 et on avance de 7 vers la droite.

Contexte : les températures

Le thermomètre est une droite graduée verticale. Monter correspond à ajouter, descendre à soustraire.



$(-1) + 5 = 4$

Le matin, il fait -1°C. La température augmente de 5°C dans la journée. L'après-midi, il fait $(-1) + 5 = 4$°C.

Contexte : les étages d'un immeuble

Un immeuble a des étages au-dessus du rez-de-chaussée (positifs) et des sous-sols (négatifs). Le rez-de-chaussée est le niveau 0.

Situation 1 : on est au 2^e sous-sol (niveau -2) et on monte de 5 étages.
$(-2) + 5 = 3$. On arrive au 3^e étage.

Situation 2 : on est au 1^{er} étage (niveau $+1$) et on descend de 4 étages.
$1 + (-4) = 1 - 4 = -3$. On arrive au 3^e sous-sol.

Contexte : un compte bancaire

Un solde positif signifie qu'il reste de l'argent sur le compte ; un solde négatif signifie qu'on a dépensé plus que ce qu'on avait (on doit de l'argent à la banque).

Situation 1 : le solde est de -30 € (on doit 30 € à la banque). On reçoit 50 €.
$(-30) + 50 = 20$ €. Le compte repasse en positif.

Situation 2 : le solde est de 15 €. On effectue un achat de 40 €.
$15 - 40 = 15 + (-40) = -25$ €. Le solde est négatif : on doit 25 € à la banque.

Exercice 2 *Additions et soustractions (5ᵉ)* (4 points)

1. Compléter la trame de calcul pour $A = (-8) + 3$:
   a) Les signes sont-ils identiques ou contraires ? ......
   b) La plus grande distance à zéro est ...... (celle du nombre ......).
   c) On calcule la différence des distances à zéro : ... $-$ ... $=$ ...
   d) Le résultat prend le signe ..., donc $A =$ ...
2. En suivant le même raisonnement, calculer :

$B = (-5) + 12$ $\quad$ $C = (-6) + (-9)$ $\quad$ $D = (-4) - (-7)$ $\quad$ $E = 3 - 10$

$F = (-1) - 8$ $\quad$ $G = 0 - (-5)$ $\quad$ $H = (-3{,}5) + 1{,}5$

Somme algébrique (5ᵉ)

On a vu qu'une soustraction peut toujours se transformer en addition de l'opposé. Cela signifie que toute suite d'additions et de soustractions de nombres relatifs peut se ramener à une suite d'additions uniquement. On appelle telle suite une **somme algébrique**. Par exemple :

- $(-3) - (-2) = (-3) + (+2)$.
- $(-3) + (+5) - (-2) - (+7) = (-3) + (+5) + (+2) + (-7)$.

Calculer une somme algébrique (1) — De gauche à droite

On effectue les additions deux à deux, dans l'ordre.

Exemples Calculer $A = (-3) + (+5) + (+2) + (-7)$.

$A = (-3) + (+5) + (+2) + (-7)$
$A = (+2) + (+2) + (-7)$ $\qquad$ $((-3) + (+5) = +2)$
$A = (+4) + (-7)$ $\qquad$ $((+2) + (+2) = +4)$
$A = -3$ $\qquad$ $((+4) + (-7) = -3)$

Calculer une somme algébrique (2) — Regroupement par signe

On additionne séparément les termes positifs et les termes négatifs, puis on effectue la dernière opération.

Exemples Calculer $A = (-3) + (+5) + (+2) + (-7)$.

$A = (-3) + (+5) + (+2) + (-7)$
$A = (+5) + (+2) + (-3) + (-7)$ $\qquad$ (on regroupe par signe)
$A = (+7) + (-10)$ $\qquad$ ($5 + 2 = 7$; $3 + 7 = 10$)
$A = -3$ $\qquad$ (signes différents : $10 - 7 = 3$, on garde le signe $-$)

Exercice 3 *Sommes algébriques (5e)* **(3 points)** Calculer en détaillant les étapes :

a) $A = (-5) + (+3) - (+8)$

b) $B = (+4) - (-6) + (-1)$

c) $C = (-2) - (-9) - (+3) + (-7)$

d) $D = (+1) - (+4) - (-5) - (+2)$

De l'écriture complète à l'écriture simplifiée (5e)

En mathématiques, on écrit souvent $-3 - 8$ plutôt que $(-3) - (+8)$. Cette écriture sans parenthèses s'appelle l'**écriture simplifiée**.

Objectif et méthode

L'objectif est de supprimer toutes les parenthèses. Pour y parvenir, on transforme chaque opération de sorte que le nombre qui la suit soit positif (sauf éventuellement le premier nombre, pour lequel on retire simplement les parenthèses en gardant son signe). On utilise deux propriétés :

- ajouter un nombre négatif revient à soustraire le nombre positif correspondant : $+(-a) = -(+a)$;
- soustraire un nombre négatif revient à ajouter le nombre positif correspondant : $-(-a) = +(+a)$.

Les deux autres cas, $+(+a)$ et $-(+a)$, sont déjà sous la bonne forme. Une fois que tous les nombres entre parenthèses sont positifs, on peut retirer les parenthèses car le signe + devant un nombre positif est facultatif.

Exemples

- Simplifier $A = (-3) - (+8)$: le cas $-(+a)$ est déjà sous la bonne forme, on retire simplement les parenthèses :

$$A = (-3) - (+8)$$
$$A = -3 - 8$$

- Simplifier $B = (-3) - (-8)$: on applique $-(-a) = +(+a)$:

$$B = (-3) - (-8)$$
$$B = (-3) + (+8) \qquad (-(-8) = +(+8))$$
$$B = -3 + 8 \qquad \text{(on supprime les parenthèses et le + de +8)}$$

- Simplifier $C = (+5) - (-3) + (-7) - (+2)$:

$$C = (+5) - (-3) + (-7) - (+2)$$
$$C = (+5) + (+3) - (+7) - (+2) \qquad (-(-3) = +(+3)\ ;\ +(-7) = -(+7)\ ;\ -(+2)\text{ inchangé})$$
$$C = 5 + 3 - 7 - 2 \qquad \text{(on supprime les parenthèses et les + des nombres positifs)}$$

Automatisme de conversion rapide

En observant le tableau ci-dessous, on constate que les quatre cas se résument à une règle simple : deux signes identiques (le signe de l'opération et celui du nombre) donnent +, deux signes contraires donnent −.

On voit	On écrit	Règle utilisée
$+(+a)$	$+a$	même signe, donc +
$+(-a)$	$-a$	signes contraires, donc − (car $+(-a) = -(+a)$)
$-(+a)$	$-a$	signes contraires, donc −
$-(-a)$	$+a$	même signe, donc + (car $-(-a) = +(+a)$)

Ce moyen mnémotechnique est cohérent avec les propriétés vues plus haut : il donne exactement le même résultat, mais permet de convertir plus rapidement.

Exercice 4 *Passer en écriture simplifiée (5^e)* **(3 points)**

1. Compléter chaque étape pour simplifier $(+6)+(-2)-(-4)+(-8)$:
   a) On transforme $+(-2)$ en . . . . . . ; on transforme $-(-4)$ en . . . . . . ; on transforme $+(-8)$ en . . . . . .
   b) On obtient : $(+6)\ldots(+2)\ldots(+4)\ldots(+8)$
   c) On supprime les + des nombres positifs : . . . .
2. Transformer en écriture simplifiée :
   a) $A=(+5)+(-3)+(+8)+(-1)$
   b) $B=(-4)+(+6)-(-2)+(-9)$
   c) $C=(+7)-(+3)-(-5)+(-2)$

Lire l'écriture simplifiée (5^e)

Quand on lit $5+3-7-2$, on a l'impression de voir une suite d'additions et de soustractions. C'est bien sûr le cas, mais il est préférable de voir cette écriture d'une autre façon afin de pouvoir justifier les calculs : on imagine des additions invisibles entre les termes et des parenthèses invisibles autour de chaque nombre (son signe et sa partie numérique) :

$$5+3-7-2 \quad = \quad \underbrace{(+5)}_{\text{positif}}+\underbrace{(+3)}_{\text{positif}}+\underbrace{(-7)}_{\text{négatif}}+\underbrace{(-2)}_{\text{négatif}}$$

Chaque signe + ou − visible est le signe du nombre relatif qui suit, et l'opération entre les nombres est toujours une addition.

Vérifions que cette lecture est cohérente avec la méthode rigoureuse. Dans l'exemple C, on est parti de $(+5)-(-3)+(-7)-(+2)$ et on a obtenu $5+3-7-2$ en appliquant les propriétés. Inversement, en lisant $5+3-7-2$ avec les additions invisibles, on obtient $(+5)+(+3)+(-7)+(-2)$. C'est bien la même chose que l'expression de départ, puisque $-(-3)=+(+3)$ et $+(-7)=-(+7)$. Les deux lectures donnent le même résultat.

Exercice 5 *Lire l'écriture simplifiée (5^e)* **(2 points)**

1. Compléter pour revenir à l'écriture complète :
   $5-9+3-1$
   a) On rétablit les parenthèses : $\ldots-(+9)+\ldots-\ldots$
   b) On remplace chaque soustraction par l'addition de l'opposé : . . . .
2. Transformer en écriture complète (additions de nombres relatifs entre parenthèses) :
   a) $D=6-3+8-1$
   b) $E=-4+7-2-9$
   c) $F=-5-8+3+1$
3. Dans l'expression $5-7+2$, expliquer en une ou deux phrases le rôle de chaque signe visible (+ ou −). Quels sont les trois nombres relatifs de cette somme ?

Calculer en écriture simplifiée (5^e)

On peut appliquer les méthodes 1 et 2 directement en écriture simplifiée, sans revenir à l'écriture complète. C'est plus rapide, mais cela demande d'imaginer les additions invisibles entre les termes.
En cas de doute, on peut toujours revenir à l'écriture complète avec parenthèses (comme expliqué dans « Lire l'écriture simplifiée ») et appliquer les méthodes 1 ou 2.

Exemples

- Calculer $G = 7 - 3 - 8 + 2$ (méthode 1 : de gauche à droite).

$G = 7 - 3 - 8 + 2$	
$G = 4 - 8 + 2$	(signes différents : $7 - 3 = 4$, on garde le signe $+$)
$G = -4 + 2$	(signes différents : $8 - 4 = 4$, on garde le signe $-$)
$G = -2$	(signes différents : $4 - 2 = 2$, on garde le signe $-$)

- Calculer $H = -6 + 4 - 1 + 9 - 3$ (méthode 2 : regroupement par signe).

$H = -6 + 4 - 1 + 9 - 3$	
$H = 4 + 9 - 6 - 1 - 3$	(on regroupe par signe)
$H = 13 - 10$	($4 + 9 = 13$; $6 + 1 + 3 = 10$)
$H = 3$	(signes différents : $13 - 10 = 3$, on garde le signe $+$)

- Calculer $I = -5 + 2 - 3$ (en revenant à l'écriture complète).

$I = -5 + 2 - 3$	
$I = (-5) + (+2) + (-3)$	(on rétablit les parenthèses et les additions)
$I = (-3) + (-3)$	(signes différents : $5 - 2 = 3$, on garde le signe $-$)
$I = -6$	(mêmes signes : $3 + 3 = 6$, résultat négatif)

Exercice 6 ***Calculer en écriture simplifiée (5^e)*** **(5 points)**

1. Compléter chaque étape pour calculer $-6 + 2 - 3 + 9 - 1$ en regroupant :
   a) Termes positifs : ... et ...; leur somme : ...
   b) Termes négatifs : ..., ... et ...; leur somme : ...
   c) Résultat : ... − ... = ...
2. Calculer de gauche à droite (méthode 1) :
   a) $A = 8 - 5 + 3 - 4$
   b) $B = -3 + 7 - 2 + 1$
3. Calculer en regroupant par signe (méthode 2) :
   a) $C = 7 - 3 + 5 - 8$
   b) $D = -4 + 9 - 6 + 2 - 1$
   c) $E = 5 + 3 - 8 - 1 + 6$

Multiplication et division (4^e)

La règle des signes est la même pour la multiplication et la division.

Même signe : quand les deux nombres ont le même signe (tous les deux positifs ou tous les deux négatifs), le résultat est **positif** ;

Signes différents : quand un nombre est positif et l'autre négatif, le résultat est **négatif**.

Exemple.

- $(-4) \times (-6) = +24$ car les deux sont négatifs (même signe) ;
- $(-4) \times 6 = -24$ car l'un est négatif et l'autre positif (signes différents) ;
- $(-15) \div (-3) = +5$ car les deux sont négatifs (même signe).

Produit de plusieurs facteurs : on compte les facteurs négatifs. Si ce nombre est pair, le résultat est positif ; s'il est impair, le résultat est négatif.

Exemple. $(-2) \times 3 \times (-1) \times (-4)$. Il y a trois facteurs négatifs (nombre impair), donc le résultat est négatif : $-(2 \times 3 \times 1 \times 4) = -24$.

Exercice 7 *Multiplications et divisions (4^e^)* **(4 points)** Calculer :

1. $A = (-3) \times 5$
2. $B = (-7) \times (-4)$
3. $C = 6 \times (-2)$
4. $D = (-20) \div 4$
5. $E = (-18) \div (-3)$
6. $F = (-1) \times (-1) \times (-1)$
7. $G = (-2)^3$
8. $H = (-10) \times 0{,}5$

Erreurs classiques

Confondre -3^2 et $(-3)^2$: $-3^2 = -(3 \times 3) = -9$ car le carré porte sur 3 seul. En revanche, $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$ car le carré porte sur (-3) tout entier ;

Double négation : l'opposé de l'opposé redonne le nombre de départ. Par exemple, $-(-7) = 7$ et $-(-(-2)) = -2$;

Oublier les priorités : dans $5 - 3 \times 2$, on calcule d'abord la multiplication : $3 \times 2 = 6$, puis $5 - 6 = -1$. Erreur fréquente : calculer $5 - 3 = 2$ d'abord et trouver 4 ;

Croire que soustraire rend toujours plus petit : c'est vrai avec les nombres positifs, mais $5 - (-3) = 8$, qui est plus grand que 5. Soustraire un nombre négatif revient à ajouter.

Enchaînement d'opérations

Pour calculer une expression contenant plusieurs opérations avec des nombres relatifs, on suit toujours la même méthode :

1. effectuer les calculs entre parenthèses ;
2. effectuer les multiplications et les divisions (de gauche à droite) ;
3. remplacer chaque soustraction par l'addition de l'opposé ;
4. effectuer les additions (de gauche à droite).

On peut aussi passer par l'écriture simplifiée après l'étape 2 : on identifie le signe de chaque terme, on regroupe les termes positifs et les termes négatifs, puis on conclut.

Rédaction modèle (méthode classique) calculer $A = -3 + 7 \times (-2) - (-4)$.

$A = -3 + 7 \times (-2) - (-4)$

$A = -3 + (-14) - (-4)$ (multiplication en priorité)

$A = -3 + (-14) + 4$ (soustraire -4, c'est ajouter 4)

$A = -17 + 4$ ($-3 + (-14) = -17$)

$A = -13$

Rédaction modèle (avec écriture simplifiée) calculer $A = -3 + 7 \times (-2) - (-4)$.

$A = -3 + 7 \times (-2) - (-4)$

$A = -3 + (-14) - (-4)$ (multiplication en priorité)

$A = -3 - 14 + 4$ (écriture simplifiée)

$A = 4 - 3 - 14$ (on regroupe par signe)

$A = 4 - 17$ ($3 + 14 = 17$)

$A = -13$ (signes différents : $17 - 4 = 13$, on garde le signe $-$)

Carré et signe

Calculer $B = (-5)^2 - 3^2$.

Rédaction modèle

$$\begin{aligned}
B &= (-5)^2 - 3^2 \\
B &= (-5) \times (-5) - 3 \times 3 && \text{(on développe les carrés)} \\
B &= 25 - 9 && \text{(même signe pour le premier, positif)} \\
B &= 16
\end{aligned}$$

Attention : si l'énoncé avait été $B = -5^2 - 3^2$ (sans parenthèses autour du -5) :

$$\begin{aligned}
B &= -5^2 - 3^2 \\
B &= -(5 \times 5) - (3 \times 3) && \text{(le carré porte sur 5 seul)} \\
B &= -25 - 9 \\
B &= -34
\end{aligned}$$

Les parenthèses changent tout.

Exercice 8 *Signe et parenthèses (4^e^)* **(3 points)** Sans calculatrice, donner la valeur de chaque expression. Justifier.

1. $(-4)^2$
2. -4^2
3. $-(-4)^2$
4. $(-1)^{10}$
5. $(-1)^{13}$
6. $-(-7)$

Exercice 9 *Enchaînement d'opérations (4^e^)* **(4 points)** Calculer en détaillant chaque étape :

1. $A = 5 - 3 \times (-4)$
2. $B = (-2) \times 6 + (-3) \times (-5)$
3. $C = -7 + 2 \times (3 - 8)$
4. $D = \dfrac{(-6) \times 4}{(-3) \times (-2)}$

Exercice 10 *Vrai ou faux ?* **(3 points)** Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier.

1. Le carré d'un nombre négatif est toujours négatif.
2. $(-3) - (-3) = -6$.
3. Le produit de deux nombres négatifs est positif.
4. $-5^2 = 25$.
5. Si a et b sont deux nombres négatifs, alors $a + b$ est négatif.
6. L'opposé de -8 est -8.
7. $-8 > -3$ car $8 > 3$.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Corrigé de l'exercice 1.

1. Sur la droite graduée, plus un nombre est à gauche, plus il est petit.
   Ordre croissant : $-10 < -7 < -3 < -1 < 0 < 3 < 5$.
2. Comparaisons :
   a) $-5 < 2$ (tout nombre négatif est inférieur à tout nombre positif) ;
   b) $-3 > -8$ (-3 est plus proche de zéro, donc plus grand que -8) ;
   c) $0 > -1$ (zéro est supérieur à tout nombre strictement négatif) ;
   d) $-4{,}5 < -4$ ($-4{,}5$ est plus éloigné de zéro que -4, donc plus petit).
3. L'opposé de -6 est $+6$; l'opposé de $+4$ est -4 ; l'opposé de 0 est 0 ; l'opposé de $-0{,}5$ est $+0{,}5$.

Corrigé de l'exercice 2.

1. Trame de calcul pour $A = (-8) + 3$:
   a) Les signes sont **contraires** (-8 est négatif, 3 est positif).
   b) La plus grande distance à zéro est 8 (celle du nombre -8).
   c) On calcule la différence : $8 - 3 = 5$.
   d) Le résultat prend le signe $-$ (celui de -8), donc $A = -5$.
2. Calculs :
   a) Signes différents : la plus grande distance à zéro est 12 (celle de $+12$, positif), résultat positif.

$$B = (-5) + 12$$
$$B = +(12 - 5)$$
$$B = 7$$

   b) Même signe (deux négatifs) : on additionne les distances à zéro, le résultat est négatif.

$$C = (-6) + (-9)$$
$$C = -(6 + 9)$$
$$C = -15$$

   c) Soustraire (-7) revient à ajouter $(+7)$:

$$D = (-4) - (-7)$$
$$D = (-4) + (+7)$$
$$D = 7 - 4$$
$$D = 3$$

   d) Soustraire 10 revient à ajouter (-10) :

$$E = 3 - 10$$
$$E = 3 + (-10)$$
$$E = -(10 - 3)$$
$$E = -7$$

   e) Soustraire 8 revient à ajouter (-8) :

$$F = (-1) - 8$$
$$F = (-1) + (-8)$$
$$F = -(1 + 8)$$
$$F = -9$$

f) Soustraire (-5) revient à ajouter $(+5)$:

$$G = 0 - (-5)$$
$$G = 0 + (+5)$$
$$G = 5$$

g) Signes différents : la plus grande distance à zéro est $3{,}5$ (celle de $-3{,}5$, négatif), résultat négatif.

$$H = (-3{,}5) + 1{,}5$$
$$H = -(3{,}5 - 1{,}5)$$
$$H = -2$$

Corrigé de l'exercice 3.

1. On remplace la soustraction par l'addition de l'opposé, puis on calcule de gauche à droite (méthode 1) :

$A = (-5) + (+3) - (+8)$	
$A = (-5) + (+3) + (-8)$	$(-(+8) = +(-8))$
$A = (-2) + (-8)$	(signes différents : $5 - 3 = 2$, on garde le signe $-$)
$A = -10$	(mêmes signes : $2 + 8 = 10$, résultat négatif)

2. On remplace la soustraction par l'addition de l'opposé, puis on regroupe :

$B = (+4) - (-6) + (-1)$	
$B = (+4) + (+6) + (-1)$	$(-(-6) = +(+6))$
$B = (+4) + (+6) + (-1)$	(on regroupe par signe)
$B = (+10) + (-1)$	$(4 + 6 = 10)$
$B = 9$	(signes différents : $10 - 1 = 9$, on garde le signe $+$)

3. On remplace chaque soustraction par l'addition de l'opposé, puis on regroupe :

$C = (-2) - (-9) - (+3) + (-7)$	
$C = (-2) + (+9) + (-3) + (-7)$	$(-(-9) = +(+9))$
$C = (+9) + (-2) + (-3) + (-7)$	(on regroupe par signe)
$C = 9 + (-12)$	$(2 + 3 + 7 = 12)$
$C = -3$	(signes différents : $12 - 9 = 3$, on garde le signe $-$)

4. On remplace chaque soustraction par l'addition de l'opposé, puis on regroupe :

$D = (+1) - (+4) - (-5) - (+2)$	
$D = (+1) + (-4) + (+5) + (-2)$	$(-(-5) = +(+5))$
$D = (+1) + (+5) + (-4) + (-2)$	(on regroupe par signe)
$D = (+6) + (-6)$	$(1 + 5 = 6\ ;\ 4 + 2 = 6)$
$D = 0$	(même valeur, signes opposés)

Corrigé de l'exercice 4.

1. Simplification guidée :

$(+6) + (-2) - (-4) + (-8)$	
$= (+6) - (+2) + (+4) - (+8)$	$(+(-2) = -(+2)\ ;\ -(-4) = +(+4)\ ;\ +(-8) = -(+8))$
$= 6 - 2 + 4 - 8$	(on supprime les parenthèses et les $+$ des nombres positifs)

2. Transformation en écriture simplifiée :
   a) On transforme $+(-3)$ en $-(+3)$ et $+(-1)$ en $-(+1)$:

$$A = (+5) + (-3) + (+8) + (-1)$$
$$A = (+5) - (+3) + (+8) - (+1)$$
$$A = 5 - 3 + 8 - 1$$

   b) On transforme $-(-2)$ en $+(+2)$ et $+(-9)$ en $-(+9)$:

$$B = (-4) + (+6) - (-2) + (-9)$$
$$B = (-4) + (+6) + (+2) - (+9)$$
$$B = -4 + 6 + 2 - 9$$

   c) On transforme $-(-5)$ en $+(+5)$ et $+(-2)$ en $-(+2)$:

$$C = (+7) - (+3) - (-5) + (-2)$$
$$C = (+7) - (+3) + (+5) - (+2)$$
$$C = 7 - 3 + 5 - 2$$

Corrigé de l'exercice 5.

1. Retour à l'écriture complète :

$$\begin{aligned} & 5 - 9 + 3 - 1 \\ &= (+5) - (+9) + (+3) - (+1) && \text{(on rétablit les parenthèses)} \\ &= (+5) + (-9) + (+3) + (-1) && \text{(on remplace chaque soustraction par l'addition de l'opposé)} \end{aligned}$$

2. Transformation en écriture complète :

   a)
$$D = 6 - 3 + 8 - 1$$
$$D = (+6) - (+3) + (+8) - (+1)$$
$$D = (+6) + (-3) + (+8) + (-1)$$

   b)
$$E = -4 + 7 - 2 - 9$$
$$E = (-4) + (+7) - (+2) - (+9)$$
$$E = (-4) + (+7) + (-2) + (-9)$$

   c)
$$F = -5 - 8 + 3 + 1$$
$$F = (-5) - (+8) + (+3) + (+1)$$
$$F = (-5) + (-8) + (+3) + (+1)$$

3. Chaque signe visible (+ ou −) est le signe du nombre relatif qui le suit. Ainsi, dans $5 - 7 + 2$, les trois nombres relatifs sont $(+5)$, (-7) et $(+2)$. L'opération entre eux est toujours une addition (les additions sont « invisibles ») : $5 - 7 + 2 = (+5) + (-7) + (+2)$.

Corrigé de l'exercice 6.

1. Calcul guidé par regroupement :

$$-6 + 2 - 3 + 9 - 1$$

Termes positifs : 2 et 9 ; leur somme : $2 + 9 = 11$.
Termes négatifs : -6, -3 et -1 ; leur somme : $6 + 3 + 1 = 10$.
Résultat : $11 - 10 = 1$.

2. Calcul de gauche à droite :

a)

$A = 8 - 5 + 3 - 4$
$A = 3 + 3 - 4$ (signes différents : $8 - 5 = 3$, on garde le signe $+$)
$A = 6 - 4$ (mêmes signes : $3 + 3 = 6$, résultat positif)
$A = 2$ (signes différents : $6 - 4 = 2$, on garde le signe $+$)

b)

$B = -3 + 7 - 2 + 1$
$B = 4 - 2 + 1$ (signes différents : $7 - 3 = 4$, on garde le signe $+$)
$B = 2 + 1$ (signes différents : $4 - 2 = 2$, on garde le signe $+$)
$B = 3$

3. Calcul par regroupement :

a)

$C = 7 - 3 + 5 - 8$
$C = 7 + 5 - 3 - 8$ (on regroupe par signe)
$C = 12 - 11$ ($7 + 5 = 12$; $3 + 8 = 11$)
$C = 1$ (signes différents : $12 - 11 = 1$, on garde le signe $+$)

b)

$D = -4 + 9 - 6 + 2 - 1$
$D = 9 + 2 - 4 - 6 - 1$ (on regroupe par signe)
$D = 11 - 11$ ($9 + 2 = 11$; $4 + 6 + 1 = 11$)
$D = 0$ (même valeur, signes opposés)

c)

$E = 5 + 3 - 8 - 1 + 6$
$E = 5 + 3 + 6 - 8 - 1$ (on regroupe par signe)
$E = 14 - 9$ ($5 + 3 + 6 = 14$; $8 + 1 = 9$)
$E = 5$ (signes différents : $14 - 9 = 5$, on garde le signe $+$)

Corrigé de l'exercice 7.

1. Signes différents : le résultat est négatif.

$$A = (-3) \times 5$$
$$A = -15$$

2. Même signe (deux négatifs) : le résultat est positif.

$$B = (-7) \times (-4)$$
$$B = 28$$

3. Signes différents : le résultat est négatif.

$$C = 6 \times (-2)$$
$$C = -12$$

4. Signes différents : le résultat est négatif.

$$D = (-20) \div 4$$
$$D = -5$$

5. Même signe (deux négatifs) : le résultat est positif.

$$E = (-18) \div (-3)$$
$$E = 6$$

6. Trois facteurs négatifs : nombre impair de signes −, le résultat est négatif.

$$F = (-1) \times (-1) \times (-1)$$
$$F = 1 \times (-1) \qquad \text{(deux négatifs : positif)}$$
$$F = -1 \qquad \text{(signes différents)}$$

7. On développe la puissance, puis on calcule de gauche à droite :

$$G = (-2)^3$$
$$G = (-2) \times (-2) \times (-2)$$
$$G = 4 \times (-2) \qquad \text{(deux négatifs : positif)}$$
$$G = -8 \qquad \text{(signes différents)}$$

8. Signes différents : le résultat est négatif.

$$H = (-10) \times 0{,}5$$
$$H = -5$$

Corrigé de l'exercice 8.

1. Le carré porte sur (-4) tout entier (les parenthèses l'indiquent). Même signe, résultat positif :

$$(-4)^2 = (-4) \times (-4)$$
$$(-4)^2 = 16$$

2. Sans parenthèses, le carré porte uniquement sur 4. On obtient 16, puis le signe − devant donne -16 :

$$-4^2 = -(4 \times 4)$$
$$-4^2 = -16$$

3. On calcule d'abord $(-4)^2 = 16$ (voir question 1), puis on applique le signe − devant :

$$-(-4)^2 = -(16)$$
$$-(-4)^2 = -16$$

4. (-1) multiplié par lui-même 10 fois. L'exposant est pair, donc le nombre de facteurs négatifs est pair, et le résultat est positif.

$$(-1)^{10} = 1$$

5. L'exposant est impair, donc le nombre de facteurs négatifs est impair, et le résultat est négatif.

$$(-1)^{13} = -1$$

6. L'opposé de -7 est 7 (double négation : l'opposé de l'opposé redonne le nombre de départ).

$$-(-7) = 7$$

Corrigé de l'exercice 9.

1. On calcule d'abord la multiplication (priorité), puis la soustraction :

$$\begin{aligned}
A &= 5 - 3 \times (-4) \\
A &= 5 - (-12) && \text{(multiplication : } 3 \times (-4) = -12\text{)} \\
A &= 5 + 12 && \text{(soustraire } -12 = \text{ajouter } 12\text{)} \\
A &= 17
\end{aligned}$$

2. On calcule les deux multiplications (priorité), puis on additionne :

$$\begin{aligned}
B &= (-2) \times 6 + (-3) \times (-5) \\
B &= -12 + 15 && ((-2) \times 6 = -12 \ ; \ (-3) \times (-5) = 15) \\
B &= 3 && \text{(signes différents : } 15 - 12 = 3\text{, positif)}
\end{aligned}$$

3. On commence par la parenthèse, puis la multiplication, puis l'addition :

$$\begin{aligned}
C &= -7 + 2 \times (3 - 8) \\
C &= -7 + 2 \times (-5) && \text{(parenthèse : } 3 - 8 = -5\text{)} \\
C &= -7 + (-10) && \text{(multiplication : } 2 \times (-5) = -10\text{)} \\
C &= -(7 + 10) && \text{(même signe négatif)} \\
C &= -17
\end{aligned}$$

4. On calcule séparément le numérateur et le dénominateur, puis on divise :

$$\begin{aligned}
D &= \frac{(-6) \times 4}{(-3) \times (-2)} \\
D &= \frac{-24}{6} && \text{(num. : signes diff.} = -24 \ ; \ \text{dén. : même signe} = 6\text{)} \\
D &= -4 && \text{(signes différents, résultat négatif)}
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 10.

1. **Faux.** Le carré d'un nombre négatif est toujours **positif**. C'est un produit de deux nombres de même signe :

$$\begin{aligned}
(-3)^2 &= (-3) \times (-3) \\
(-3)^2 &= 9
\end{aligned}$$

   Erreur typique : confondre $(-3)^2$ et -3^2.
2. **Faux.** Soustraire (-3) revient à ajouter $(+3)$. Un nombre moins lui-même donne toujours zéro :

$$\begin{aligned}
(-3) - (-3) &= (-3) + (+3) \\
(-3) - (-3) &= 0
\end{aligned}$$

3. **Vrai.** Les deux nombres ont le même signe (négatif), donc le résultat est positif. Par exemple, $(-4) \times (-7) = 28$.

4. **Faux.** Sans parenthèses, le carré porte sur 5 seul :

$$-5^2 = -(5 \times 5)$$
$$-5^2 = -25$$

   Il ne faut pas confondre avec $(-5)^2 = 25$.
5. **Vrai.** La somme de deux nombres négatifs est toujours négative. Par exemple, $(-3) + (-5) = -8$.
   Erreur typique : croire que deux signes – ensemble donnent un +. C'est vrai pour la multiplication, pas pour l'addition.
6. **Faux.** L'opposé de -8 est $+8$. L'opposé d'un nombre est situé de l'autre côté de zéro sur la droite graduée, à la même distance.
7. **Faux.** Sur la droite graduée, -8 est plus à gauche que -3, donc $-8 < -3$. La distance à zéro de -8 est bien plus grande que celle de -3 ($8 > 3$), mais c'est la **position sur la droite** qui détermine l'ordre, pas la distance à zéro. Plus un nombre négatif est éloigné de zéro, plus il est petit.
   Erreur typique : comparer les nombres négatifs « comme des positifs » en regardant uniquement la partie numérique.