

La loi binomiale — Fiche d'exercices

Cette fiche accompagne le mémo sur la loi binomiale. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver les conditions du schéma de Bernoulli, le triangle de Pascal, la formule $P(X = k)$ et l'espérance. Commence toujours par vérifier les conditions du modèle et par écrire la loi de X .

Exercice 1 Reconnaître une épreuve et un schéma de Bernoulli (T^{le}). Pour chaque situation, dire s'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli ou d'un schéma de Bernoulli ; le cas échéant, préciser le succès, p et n . Sinon, expliquer pourquoi.

1. On tire une carte dans un jeu de 32 cartes et l'on regarde si c'est un as.

.....
.....

2. On tire une carte, on la remet, on mélange, et l'on répète cinq fois en comptant les as obtenus.

.....
.....

3. On tire cinq cartes d'un coup et l'on compte les as.

.....
.....

4. On lance un dé et l'on note le numéro obtenu.

.....
.....

5. On répond au hasard à un questionnaire de 10 questions ayant chacune 4 réponses possibles dont une seule est juste, et l'on compte les bonnes réponses.

.....
.....

Exercice 2 Calculer des coefficients binomiaux, étape par étape (T^{le}).

1. Compléter : $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot \dots!} = \frac{\dots}{2 \times \dots} = \dots$ Retrouver ce nombre dans le triangle de Pascal.

2. Donner sans calcul : $\binom{8}{0} = \dots$ $\binom{7}{1} = \dots$ $\binom{6}{6} = \dots$ $\binom{10}{9} = \dots$

3. Calculer $\binom{6}{3}$ avec la formule, puis $\binom{10}{8}$ en utilisant la symétrie.

4. Vérifier la relation de Pascal avec $\binom{6}{2} + \binom{6}{3}$.

.....

.....

Exercice 3 Calculer une probabilité binomiale, étape par étape (T^{le}). On lance un dé équilibré 4 fois et l'on note X le nombre de six obtenus.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

.....

.....

.....

2. Compléter : $P(X = 1) = \binom{4}{\dots\dots\dots} \left(\frac{1}{6}\right)^{\dots\dots\dots} \left(\frac{5}{6}\right)^{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots \times \frac{1}{6} \times \frac{125}{216} = \frac{\dots\dots\dots}{1296} \approx \dots\dots\dots$

3. Calculer P(X = 0) et P(X = 4) (valeurs exactes et arrondies au millième).

4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un six.

Exercice 4 Loi binomiale et calculatrice (T^{le}). Un questionnaire comporte 10 questions, chacune avec 4 réponses proposées dont une seule est juste. Un élève répond au hasard à toutes les questions. On note X le nombre de bonnes réponses.

1. Donner la loi de X.

.....

.....

2. Calculer P(X = 3) avec la formule (arrondir au millième), puis vérifier à la calculatrice.

3. Calculer P(X ≤ 2), puis P(X ≥ 5) (arrondir au millième).

4. Calculer $E(X)$ et l'interpréter.

.....

.....

Exercice 5 *Espérance et écart-type (T^le).*

1. X suit $\mathcal{B}(50 ; 0,2)$. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondir au centième).

$E(X) =$ $V(X) =$ $\sigma(X) =$

2. Une pièce truquée donne « pile » avec la probabilité 0,6. On la lance 20 fois et Y compte les « pile ». Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.

$E(Y) =$ $\sigma(Y) =$

3. Z suit une loi binomiale $\mathcal{B}(30 ; p)$ d'espérance 6. Déterminer p .

.....

.....

4. Interpréter $E(X) = 10$ à la question 1 par une phrase.

.....

.....

.....

Exercice 6 *Problème en contexte : contrôle de qualité (T^le).* Une machine produit des pièces dont 3 % sont défectueuses. On prélève 20 pièces au hasard dans une production très importante, ce qui permet d'assimiler le prélèvement à un tirage avec remise. On note X le nombre de pièces défectueuses du prélèvement.

1. Justifier que X suit $\mathcal{B}(20 ; 0,03)$.

.....

.....

.....

2. Calculer la probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse (arrondir au millième).

.....

.....

3. Calculer la probabilité qu'au moins une pièce soit défectueuse.

.....

.....

4. Le lot est refusé s'il contient au moins deux pièces défectueuses. Calculer la probabilité de refus.

5. Calculer $E(X)$ et interpréter.

.....

.....

Exercice 7 Problème en contexte : combien de tentatives ? (T^{le}). Un basketteur réussit un lancer franc avec la probabilité 0,4, indépendamment des autres lancers. Il effectue n lancers et X compte les lancers réussis.

1. Donner la loi de X et exprimer $P(X \geq 1)$ en fonction de n .

.....

.....

2. Combien de lancers doit-il effectuer au minimum pour que la probabilité de réussir au moins un lancer dépasse 0,99? Résoudre l'inéquation à l'aide du logarithme, puis vérifier avec les puissances de 0,6.

Exercice 8 QCM (T^{le}). Pour chaque question, entourer la bonne réponse.

1. $\binom{5}{2}$ vaut :

A. 20 B. 25 C. 5 D. 10

2. X suit $\mathcal{B}(6 ; 0,5)$. Alors $P(X = 6)$ vaut :

A. 0,5 B. $6 \times 0,5$ C. $0,5^6$ D. $\frac{1}{6}$

3. X suit $\mathcal{B}(40 ; 0,25)$. Alors $E(X)$ vaut :

A. 10 B. 30 C. 0,25 D. 7,5

4. Dans un schéma de Bernoulli, les épreuves doivent être :

A. toutes différentes B. identiques et indépendantes
C. au nombre de deux exactement D. de probabilité de succès 0,5

Exercice 9 Vrai ou faux? Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Une épreuve de Bernoulli a exactement deux issues.

B. Si X suit $\mathcal{B}(n ; p)$, alors $E(X) = np$.

C. Pour tous entiers $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

D. Si X suit une loi binomiale, alors $P(X \geq 1) = P(X = 1)$.

E. Tirer successivement 5 boules sans remise dans une urne et compter les boules rouges définit un schéma de Bernoulli.

F. $\binom{n}{0} = 0$.

G. Si X suit $\mathcal{B}(10 ; 0,3)$, alors $P(X = 10) = 0,3^{10}$.

H. Si X suit $\mathcal{B}(n ; p)$, alors $V(X) = np$.