

La fonction logarithme népérien — Fiche d'exercices

Cette fiche accompagne le mémo sur la fonction logarithme népérien. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver la définition, les propriétés algébriques, la méthode de résolution des équations et la dérivée. Écris toujours la condition d'existence avant de résoudre.

Exercice 1 Comprendre la définition, étape par étape (T^{le}).

1. Compléter : $\ln 1 = \dots\dots\dots$ $\ln e = \dots\dots\dots$ $e^{\ln 5} = \dots\dots\dots$ $\ln(e^{-3}) = \dots\dots\dots$ $\ln(e^2) + \ln 1 = \dots\dots\dots$
2. Résoudre $e^x = 7$, puis $\ln x = 2$ (valeur exacte, puis arrondi au centième).
 $e^x = 7 \iff x = \dots\dots\dots$ $\ln x = 2 \iff x = \dots\dots\dots$
3. Sans calculatrice, donner le signe de $\ln 0,5$, de $\ln 3$ et de $\ln 1$. Ranger dans l'ordre croissant $\ln 0,5$, $\ln 3$, $\ln 1$, $\ln 2$.

Exercice 2 Calculer avec les propriétés (T^{le}).

1. Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:
 - a) $A = \ln 12 = \dots\dots\dots$
 - b) $B = \ln\left(\frac{8}{9}\right) = \dots\dots\dots$
 - c) $C = \ln \sqrt{6} = \dots\dots\dots$
 - d) $D = \ln\left(\frac{1}{16}\right) = \dots\dots\dots$
 - e) $E = \ln 6 - \ln 3 = \dots\dots\dots$
 - f) $F = \ln 4 - 2 \ln 2 = \dots\dots\dots$
2. Simplifier : $G = e^{3 \ln 2} = \dots\dots\dots$ $H = \ln(e^4) - \ln(e) = \dots\dots\dots$ $I = \ln(e^x \times e^2) = \dots\dots\dots$

Exercice 3 Résoudre des équations et des inéquations (T^{le}). Résoudre dans $\mathbb{R}$, en précisant d'abord la condition d'existence.

1. $\ln x = 3$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

2. $\ln(2x - 1) = \ln(x + 4)$

3. $e^{2x} = 5$

.....

4. $\ln x \leq 1$

.....

5. $3e^x - 6 = 0$

.....

6. $\ln x + \ln(x - 3) = \ln 4$

Exercice 4 Seuil d'une suite géométrique, étape par étape (T^{le}).

1. Un médicament s'élimine de 25 % par heure : $m_n = 200 \times 0,75^n$ (en mg). On cherche le premier rang tel que $m_n < 1$. Compléter :

$$m_n < 1 \iff 0,75^n < \dots \iff n \ln 0,75 \dots \ln(\dots) \iff n \dots \frac{\ln(\dots)}{\ln 0,75} \approx \dots,$$

car $\ln 0,75 \dots 0$.

Le premier rang est $n = \dots$

2. Un capital de 2000 € placé à 4 % par an vaut $C_n = 2000 \times 1,04^n$ au bout de n années. Au bout de combien d'années dépasse-t-il 3000 €?

Exercice 5 Dériver avec le logarithme (T^{le}). Dériver chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = 3 \ln x - x$ sur $]0 ; +\infty[: f'(x) = \dots$

2. $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R} : g'(x) = \dots$

3. $h(x) = x \ln x$ sur $]0 ; +\infty[: h'(x) = \dots$

4. $k(x) = \ln(2x + 5)$ sur $\left] -\frac{5}{2} ; +\infty \right[: k'(x) = \dots$

5. $m(x) = (\ln x)^2$ sur $]0 ; +\infty[: m'(x) = \dots$

6. $n(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0 ; +\infty[: n'(x) = \dots\dots\dots$

Exercice 6 Étudier une fonction avec le logarithme (T^e). Soit $f(x) = x \ln x$, définie sur $]0 ; +\infty[$.

1. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ et résoudre $f'(x) > 0$.

3. Dresser le tableau de variations de f et préciser son minimum (valeur exacte, puis arrondie au centième).

4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

Exercice 7 Problème en contexte : temps de doublement (T^e). Un capital C_0 est placé à 3 % par an, les intérêts s'ajoutant chaque année au capital. On note $C_n = C_0 \times 1,03^n$ le capital au bout de n années.

1. Montrer que $C_n \geq 2C_0$ équivaut à $n \ln 1,03 \geq \ln 2$.

2. En déduire le nombre d'années nécessaire pour que le capital double.

3. Pour un taux annuel t quelconque, justifier que le temps de doublement est le premier entier supérieur ou égal à $\frac{\ln 2}{\ln(1+t)}$. Le calculer pour $t = 6\%$.

4. Les banquiers utilisent la « règle des 70 » : le temps de doublement vaut environ $\frac{70}{\text{taux en pourcentage}}$.
Comparer avec les résultats précédents.

Exercice 8 QCM (T^le). Pour chaque question, entourer la bonne réponse.

1. $\ln(e^3)$ est égal à :

A. $3e$ B. e^3 C. 3 D. $\frac{1}{3}$

2. $\ln 12 - \ln 3$ est égal à :

A. $\ln 9$ B. $\ln 4$ C. $\ln 36$ D. 4

3. L'équation $e^x = -2$:

A. a pour solution $x = \ln(-2)$ B. a pour solution $x = -\ln 2$
C. a pour solution $x = \ln 2$ D. n'a aucune solution

4. La dérivée de $x \mapsto \ln(3x)$ sur $]0 ; +\infty[$ est :

A. $\frac{1}{x}$ B. $\frac{1}{3x}$ C. $\frac{3}{x}$ D. $\ln 3$

Exercice 9 Vrai ou faux? Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

- A. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

- B. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$.

- C. Si $0 < x < 1$, alors $\ln x < 0$.

- D. La fonction $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}$.

E. Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.

F. Pour tout réel x , $e^{\ln x} = x$.

G. La courbe de la fonction $\ln$ admet l'axe des ordonnées pour asymptote.

H. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = +\infty$.