

Limites de fonctions et continuité — Fiche d'exercices

Cette fiche accompagne le mémo sur les limites de fonctions. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver les limites de référence, les formes indéterminées, les croissances comparées et le théorème des valeurs intermédiaires. Avant de conclure une limite, demande-toi toujours s'il s'agit d'une forme indéterminée.

Exercice 1 Limites en l'infini et asymptotes horizontales (T^{le}).

- Donner la limite en $+\infty$ puis en $-\infty$ de chaque fonction.
 - $f(x) = x^2 + 1$: en $+\infty$: en $-\infty$:
 - $g(x) = 5 - \frac{1}{x^2}$: en $+\infty$: en $-\infty$:
 - $h(x) = -2x^3$: en $+\infty$: en $-\infty$:
 - $k(x) = e^x + 4$: en $+\infty$: en $-\infty$:
- Pour g et k , donner l'équation de chaque asymptote horizontale en précisant en quel infini elle est valable.
.....
.....
.....

Exercice 2 Limite en une valeur interdite, étape par étape (T^{le}). Soit $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- Compléter : quand $x \rightarrow 2$, le numérateur $x + 4 \rightarrow$
- Compléter : pour $x < 2$, $x - 2$ est pour $x > 2$, $x - 2$ est
- En déduire $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$
- Donner l'équation de l'asymptote verticale, puis calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ et donner l'asymptote horizontale.

Exercice 3 Lever une forme indéterminée (T^{le}). Déterminer chaque limite, en précisant d'abord la forme indéterminée rencontrée.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x)$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 4}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5}{x^2+1}$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3)e^x$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2+1}$

Exercice 4 *Encadrer pour conclure (T^{le}).*

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x}$.

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin(x))$.

3. Soit $f(x) = \frac{2x + \cos(x)}{x}$ pour $x > 0$. Montrer que $2 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{1}{x}$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 5 Théorème des valeurs intermédiaires (T^{le}). Soit $g(x) = x^3 - 3x + 3$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$ (avec les limites en $-\infty$ et $+\infty$).

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $\alpha \in [-3 ; -2]$.

3. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

.....
.....

Exercice 6 Problème en contexte : étude complète d'une fonction (T^{le}). Le coût moyen de fabrication d'un objet, en euros, lorsqu'on en produit x centaines ($x > 0$), est modélisé par $C(x) = 2 + \frac{8}{x} + \frac{x}{2}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} C(x)$ et interpréter.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x)$. La courbe admet-elle une asymptote horizontale?

3. Calculer $C'(x)$ et montrer que $C'(x) = \frac{x^2 - 16}{2x^2}$.

4. Dresser le tableau de variations de C sur $]0 ; +\infty[$ et déterminer la production qui rend le coût moyen minimal.

Exercice 7 QCM (T^le). Pour chaque question, entourer la bonne réponse.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x + 3}$ vaut :

A. $+\infty$

B. $-\frac{1}{3}$

C. 0

D. 2

2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{x - 1}$ vaut :

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. 3

D. 0

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x$ vaut :

A. $-\infty$

B. 0

C. $+\infty$

D. 1

4. Si f est continue sur $[0 ; 2]$ avec $f(0) = -1$ et $f(2) = 3$, alors l'équation $f(x) = 0$:

A. n'a aucune solution

B. a exactement une solution dans $[0 ; 2]$

C. a au moins une solution dans $[0 ; 2]$

D. a pour solution $x = 1$

Exercice 8 Vrai ou faux? Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

- A. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, alors la droite $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{e^x} = +\infty$.

D. Une fonction continue sur $[a ; b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$ s'annule au moins une fois sur $[a ; b]$.

E. Si $f(x) \rightarrow +\infty$ et $g(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$, alors $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1$.

F. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

G. Une fonction dérivable sur un intervalle y est continue.

H. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet une limite en 0.