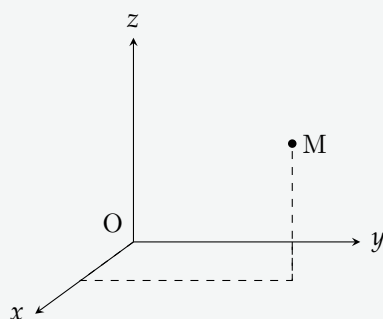


# La géométrie dans l'espace

Dans l'espace, on repère un point non plus par deux coordonnées, mais par trois :  $(x ; y ; z)$ . La bonne nouvelle, c'est que les outils du plan se prolongent presque tels quels : coordonnées d'un vecteur, distance, milieu, produit scalaire. Il suffit d'ajouter une troisième coordonnée partout. Le produit scalaire dans l'espace reste l'outil clé pour prouver qu'une droite est perpendiculaire à une autre. La difficulté est surtout de bien visualiser la figure et de ne pas oublier la coordonnée  $z$ .

## Repérage dans l'espace (T<sup>le</sup>)

Un repère de l'espace est constitué d'une origine  $O$  et de trois axes. Tout point  $M$  est repéré par trois coordonnées  $(x ; y ; z)$  :  $x$  et  $y$  situent le point « au sol »,  $z$  donne la hauteur.



## Vecteurs et colinéarité (T<sup>le</sup>)

Pour  $A(x_A ; y_A ; z_A)$  et  $B(x_B ; y_B ; z_B)$ , le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ . Deux vecteurs sont **colinéaires** lorsque l'un est un multiple de l'autre :  $\vec{u} = k \vec{v}$ .

**Exemple.** Avec  $A(1 ; 0 ; 2)$  et  $B(3 ; -1 ; 4)$  :  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$  sont colinéaires car  $\vec{v} = 2 \vec{u}$ .

## Distance et milieu (T<sup>le</sup>)

Dans un repère orthonormé :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Le milieu  $I$  de  $[AB]$  a pour coordonnées  $\left( \frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} ; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$ .

**Exemple.** Avec  $A(1 ; 0 ; 2)$  et  $B(3 ; -1 ; 4)$  :  $AB = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$ . Le milieu de  $[AB]$  est  $I \left( 2 ; -\frac{1}{2} ; 3 \right)$ .

## Produit scalaire dans l'espace (T<sup>le</sup>)

Dans un repère orthonormé, si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ , alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Comme dans le plan, deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

**Exemple.**  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 3 + 2 \times (-1) + (-1) \times 1 = 3 - 2 - 1 = 0$ . Les vecteurs sont orthogonaux.

### Méthode : montrer une orthogonalité dans l'espace

1. Calculer les coordonnées des vecteurs (différence des coordonnées des points, sans oublier z).
2. Calculer le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ .
3. Conclure : si le résultat est nul, les vecteurs (donc les droites) sont orthogonaux.

**Exercice 1** *Coordonnées, distance et milieu* Dans un repère orthonormé, A(2 ; -1 ; 3) et B(4 ; 0 ; 5).

1. Déterminer les coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$ .
2. Calculer la distance AB.
3. Déterminer les coordonnées du milieu I de [AB].

**Exercice 2** *Produit scalaire et colinéarité*

1. Les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  sont-ils orthogonaux ?
2. Les vecteurs  $\vec{a} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{b} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$  sont-ils colinéaires ?

**Exercice 3** *Synthèse (4 points)* Dans un repère orthonormé, on donne A(1 ; 0 ; 2), B(3 ; 2 ; 2) et C(2 ; -1 ; 4).

1. Calculer les coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .
2. Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .
3. En déduire la nature du triangle ABC.

## Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Oublier la coordonnée $z$	$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$	ajouter $z_B - z_A$
Oublier $z^2$ dans la distance	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$	ajouter $(z_B - z_A)^2$
Conclure colinéaire avec un seul $k$	« $-3 = 2k$ suffit »	vérifier $k$ sur les trois coordonnées
Confondre orthogonal et colinéaire	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ donc colinéaires	nul $\rightarrow$ orthogonaux

## SOLUTIONS DES EXERCICES

### Corrigé de l'exercice 1.

1.  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 4-2 \\ 0-(-1) \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
2.  $AB = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$ .
3.  $I\left(\frac{2+4}{2}; \frac{-1+0}{2}; \frac{3+5}{2}\right) = \left(3; -\frac{1}{2}; 4\right)$ .

### Corrigé de l'exercice 2.

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 3 + 2 \times (-1) + (-1) \times 1 = 3 - 2 - 1 = 0$ . Le produit scalaire est nul, donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.
2. On cherche un réel  $k$  tel que  $\vec{b} = k\vec{a}$ . On a  $-3 = k \times 2$ , soit  $k = -\frac{3}{2}$ ; on vérifie  $-\frac{3}{2} \times 4 = -6$  et  $-\frac{3}{2} \times (-2) = 3$ .  
Toutes les coordonnées concordent, donc  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont colinéaires.

### Corrigé de l'exercice 3.

1.  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
2.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 1 + 2 \times (-1) + 0 \times 2 = 2 - 2 + 0 = 0$ .
3. Le produit scalaire est nul, donc  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont orthogonaux : le triangle ABC est **rectangle en A**.