Les fractions

Les fractions sont un outil fondamental en mathématiques : elles permettent d'exprimer des partages, des proportions, des mesures exactes que les nombres décimaux ne peuvent pas toujours représenter. Pourtant, elles sont l'une des premières sources de difficultés durables chez les élèves. La plupart des erreurs viennent d'un réflexe naturel : traiter le numérateur et le dénominateur comme deux nombres entiers séparés, alors qu'une fraction est **un seul nombre**.

Vocabulaire (5^{e})

Fraction : une fraction $\frac{a}{b}$ est le quotient de deux nombres **entiers** a et b, avec $b \neq 0$. Le nombre a s'appelle le **numérateur** (ce que l'on partage), le nombre b s'appelle le **dénominateur** (en combien de parts égales on partage). La barre de fraction signifie « divisé par ».

Fraction décimale : fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 (10, 100, $1\,000$, ...).

Exemples

- $\dfrac{7}{10} = 0{,}7$
- $\dfrac{23}{100} = 0{,}23$.

Nombre en écriture fractionnaire : tout nombre écrit sous la forme $\frac{a}{b}$ (avec $b \neq 0$), où a et b ne sont pas nécessairement entiers.

Exemple. $\dfrac{3{,}5}{2}$.

Une fraction a plusieurs sens (5^{e})

La fraction $\frac{3}{4}$ peut se lire de cinq façons différentes, qui sont toutes équivalentes :

Part d'un tout
3 parts sur 4

Quotient
$3 \div 4 = 0{,}75$

Nombre
un point sur la droite

Rapport
3 pour 4

Opérateur
$\frac{3}{4}$ de quelque chose

Toutes ces lectures désignent le **même nombre**. Retenir qu'une fraction est un nombre (et non deux nombres séparés par un trait) est la clé pour éviter la plupart des erreurs.

Attention : une fraction est UN nombre, pas deux (5^{e})

L'une des erreurs les plus fréquentes consiste à traiter le numérateur et le dénominateur comme deux nombres indépendants. On appelle cela le **biais du nombre entier** : les réflexes acquis sur les entiers sont appliqués aux fractions, où ils ne fonctionnent plus.

Exemples

- **Piège de comparaison :** « $\frac{1}{8}$ est plus grand que $\frac{1}{3}$ parce que $8 > 3$ » est **faux**. Plus le dénominateur est grand, plus les parts sont petites : $\frac{1}{8} < \frac{1}{3}$.
- **Piège d'addition :** « $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{2}{7}$ » est **faux**. On ne peut pas additionner des parts de tailles différentes.
- **Piège de l'unité de référence :** « $\frac{1}{2}$ d'une petite pizza est plus petit que $\frac{1}{4}$ d'une grande pizza » est possible ! Une fraction n'a de sens que si on sait **de quoi** elle est la fraction. Quand on compare $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$, c'est sous-entendu que l'unité est la même.

Exercice 1 *Lire et écrire des fractions (5e)*

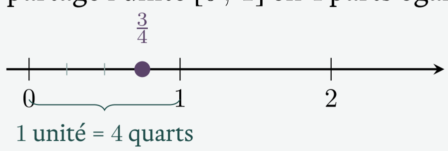
1. Compléter :
   a) Dans la fraction $\frac{7}{5}$, le numérateur est ... et le dénominateur est ...
   b) La fraction $\frac{7}{5}$ signifie 7 divisé par ...
   c) La fraction $\frac{7}{5}$ est-elle supérieure ou inférieure à 1 ? Justifier.
2. Écrire sous forme de fraction :
   a) Le quotient de 5 par 9 : ...
   b) Les trois quarts de quelque chose : ...
   c) Vingt-trois centièmes : ...
3. Le nombre $\frac{4}{4}$ est-il une fraction ? À quel nombre entier est-il égal ?

Placer une fraction sur la droite graduée (5e)

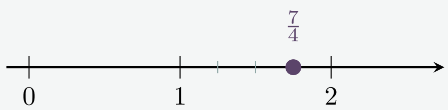
Pour placer une fraction sur la droite graduée, on partage chaque unité en parts égales selon le dénominateur, puis on compte le nombre de parts indiqué par le numérateur. Autrement dit : $\frac{3}{4}$ c'est 3 **fois** $\frac{1}{4}$. On avance trois fois d'un quart d'unité à partir de zéro.

Exemples

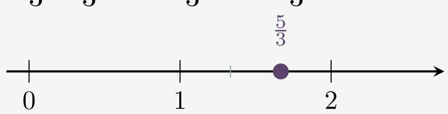
- Placer $\frac{3}{4}$ sur la droite graduée : on partage l'unité $[0\,;\,1]$ en 4 parts égales et on avance de 3 parts.



- Placer $\frac{7}{4}$ sur la droite graduée : $\frac{7}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4}$, donc $\frac{7}{4}$ est entre 1 et 2.



- Placer $\frac{5}{3}$ sur la droite graduée : $\frac{5}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}$, donc $\frac{5}{3}$ est entre 1 et 2. Ce nombre n'est pas décimal : $\frac{5}{3} = 1{,}666\ldots$



Remarque. La droite graduée est le meilleur outil pour comprendre qu'une fraction est un nombre à part entière, situé à une position précise. C'est aussi le meilleur moyen de comparer deux fractions : celle qui est la plus à droite est la plus grande.

Exercice 2 *Fractions et droite graduée (5^e^)*

1. Sur la droite graduée ci-dessous, l'unité est partagée en 5 parts égales. Placer les fractions $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{5}$ et $\frac{11}{5}$.
2. Compléter : $\frac{7}{5}$ est compris entre les entiers ... et ... car $\frac{7}{5} = \ldots + \frac{\ldots}{5}$.
3. À quel nombre entier la fraction $\frac{10}{5}$ est-elle égale ? Justifier.
4. Placer $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$ sur une droite graduée. Laquelle est la plus grande ? Expliquer pourquoi.

Écriture mixte (5^e)

Quand une fraction est supérieure à 1 (numérateur > dénominateur), on peut l'écrire sous forme d'**écriture mixte** : un entier suivi d'une fraction inférieure à 1.

Exemples

- $\frac{7}{4}$: on effectue la division euclidienne de 7 par 4 : $7 = 4 \times 1 + 3$. Donc $\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}$.
- $\frac{17}{5}$: $17 = 5 \times 3 + 2$. Donc $\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$.
- $\frac{10}{3}$: $10 = 3 \times 3 + 1$. Donc $\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$.

Inversement, pour passer de l'écriture mixte à la fraction : $2 + \frac{3}{7} = \frac{2 \times 7}{7} + \frac{3}{7} = \frac{14+3}{7} = \frac{17}{7}$.

L'écriture mixte aide à se représenter la grandeur d'une fraction : $\frac{17}{5}$ ne parle pas à tout le monde, mais « 3 et deux cinquièmes » est bien plus concret.

Exercice 3 *Écriture mixte (5^e)*

1. Décomposer chaque fraction en écriture mixte (un entier + une fraction < 1) :
   a) $A = \frac{11}{4}$
   b) $B = \frac{19}{6}$
   c) $C = \frac{23}{7}$
2. Transformer chaque écriture mixte en fraction :
   a) $D = 2 + \frac{1}{3}$
   b) $E = 4 + \frac{3}{5}$

Fractions égales (5^e)

Deux fractions sont **égales** lorsqu'elles représentent le même nombre, c'est-à-dire le même point sur la droite graduée.

Propriété fondamentale : on ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant (ou en divisant) son numérateur et son dénominateur par un **même nombre non nul** :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \qquad \text{(pour tout } k \neq 0\text{)}$$

Exemples

- $A = \dfrac{2}{3} = \dfrac{2 \times 4}{3 \times 4} = \dfrac{8}{12}$ (on a multiplié par 4).
- $B = \dfrac{15}{20} = \dfrac{15 \div 5}{20 \div 5} = \dfrac{3}{4}$ (on a divisé par 5).
- $C = \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{50}{100}$ (toutes ces fractions désignent le même point sur la droite graduée).

Comprendre : couper une pizza en 4 parts et en prendre 2, c'est la même chose que la couper en 2 parts et en prendre 1. La quantité de pizza est identique.

Simplifier une fraction (5^e)

Simplifier une fraction, c'est trouver une fraction égale avec des nombres plus petits. On divise le numérateur et le dénominateur par un **diviseur commun**.
Une fraction est **irréductible** quand on ne peut plus la simplifier (le numérateur et le dénominateur n'ont plus de diviseur commun autre que 1).

Exemples

- Simplifier $A = \dfrac{12}{18}$:

  $A = \dfrac{12}{18} = \dfrac{12 \div 2}{18 \div 2} = \dfrac{6}{9}$ (12 et 18 sont pairs, on divise par 2)

  $A = \dfrac{6 \div 3}{9 \div 3} = \dfrac{2}{3}$ (6 et 9 sont multiples de 3)

  La fraction irréductible est $A = \dfrac{2}{3}$.

- Simplifier $B = \dfrac{45}{60}$ directement avec le PGCD :
  Le PGCD de 45 et 60 est 15, donc :

  $$B = \frac{45}{60} = \frac{45 \div 15}{60 \div 15} = \frac{3}{4}$$

Exercice 4 *Reconnaître des fractions égales (5^e)*

1. Compléter les fractions égales :

   a) $A = \dfrac{3}{5} = \dfrac{\dots}{15}$ b) $B = \dfrac{4}{7} = \dfrac{12}{\dots}$ c) $C = \dfrac{\dots}{8} = \dfrac{9}{24}$ d) $D = \dfrac{20}{35} = \dfrac{4}{\dots}$

2. Parmi les fractions $\dfrac{6}{8}$, $\dfrac{9}{12}$, $\dfrac{15}{20}$ et $\dfrac{4}{6}$, lesquelles sont égales à $\dfrac{3}{4}$? Justifier chaque réponse.
3. Inventer deux fractions égales à $\dfrac{3}{4}$ qui n'apparaissent pas dans cette fiche. Expliquer la méthode utilisée.

Exercice 5 ***Simplifier des fractions (5^e)***

1. Compléter chaque étape pour simplifier $\dfrac{24}{36}$:
   a) Un diviseur commun de 24 et 36 est ...
   b) $\dfrac{24}{36} = \dfrac{24 \div \dots}{36 \div \dots} = \dfrac{\dots}{\dots}$
   c) Peut-on encore simplifier ? Si oui, $\dfrac{\dots}{\dots} = \dfrac{\dots}{\dots}$
2. Simplifier les fractions suivantes jusqu'à obtenir une fraction irréductible :

   a) $A = \dfrac{14}{21}$ b) $B = \dfrac{30}{48}$ c) $C = \dfrac{36}{90}$

Comparer des fractions (5^e)

Pour comparer deux fractions, on distingue plusieurs cas :

Même dénominateur : on compare les numérateurs.
$\dfrac{3}{7} < \dfrac{5}{7}$ car $3 < 5$ (les parts ont la même taille, on en prend plus).

Même numérateur : on compare les dénominateurs **en sens inverse**.
$\dfrac{2}{5} > \dfrac{2}{9}$ car $5 < 9$ (on prend le même nombre de parts, mais les parts de cinquièmes sont plus grandes que les parts de neuvièmes).

Comparer à 1 : si le numérateur > dénominateur, la fraction > 1 ; si numérateur < dénominateur, la fraction < 1.
$\dfrac{7}{5} > 1 > \dfrac{3}{8}$, donc $\dfrac{7}{5} > \dfrac{3}{8}$ sans calcul.

Cas général — mise au même dénominateur : on transforme les deux fractions pour qu'elles aient le même dénominateur, puis on compare les numérateurs.

Exemples Comparer $A = \dfrac{3}{4}$ et $B = \dfrac{5}{6}$:

$A = \dfrac{3}{4} = \dfrac{3 \times 3}{4 \times 3} = \dfrac{9}{12}$ (on multiplie par 3)

$B = \dfrac{5}{6} = \dfrac{5 \times 2}{6 \times 2} = \dfrac{10}{12}$ (on multiplie par 2)

On compare : $\dfrac{9}{12} < \dfrac{10}{12}$, donc $A < B$.

Remarque. Attention au biais ! Ce n'est pas parce que $3 < 5$ et $4 < 6$ que la conclusion $\dfrac{3}{4} < \dfrac{5}{6}$ est « évidente ». Ce raisonnement ne marche pas en général : par exemple, $3 < 5$ et $4 < 8$, mais $\dfrac{3}{4} > \dfrac{5}{8}$.

Comparer rapidement : les produits en croix (5^e)

Plutôt que de mettre au même dénominateur, on peut comparer $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ (avec $b > 0$ et $d > 0$) en calculant les **produits en croix**. On compare $a \times d$ et $b \times c$:

- si $a \times d > b \times c$ alors $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}$;
- si $a \times d = b \times c$ alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$;
- si $a \times d < b \times c$ alors $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$.

Pourquoi ça marche : comparer $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ revient à comparer $\frac{a \times d}{b \times d}$ et $\frac{b \times c}{b \times d}$ (mise au même dénominateur $b \times d$). Les dénominateurs étant identiques et positifs, il suffit de comparer les numérateurs $a \times d$ et $b \times c$.

Exemples

- Comparer $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{6}$: on calcule $3 \times 6 = 18$ et $4 \times 5 = 20$. Comme $18 < 20$, on a $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$.
- Comparer $\frac{7}{9}$ et $\frac{5}{7}$: on calcule $7 \times 7 = 49$ et $9 \times 5 = 45$. Comme $49 > 45$, on a $\frac{7}{9} > \frac{5}{7}$.

Cette méthode est particulièrement rapide quand les dénominateurs communs sont grands ou difficiles à trouver de tête.

Exercice 6 *Comparer et ranger des fractions (5e)*

1. Comparer sans calcul (expliquer la méthode utilisée) :
   a) $A = \frac{4}{11}$ et $B = \frac{7}{11}$
   b) $C = \frac{3}{5}$ et $D = \frac{3}{8}$
   c) $E = \frac{9}{7}$ et $F = \frac{5}{9}$
2. Comparer en mettant au même dénominateur :
   a) $G = \frac{2}{3}$ et $H = \frac{5}{8}$
   b) $I = \frac{7}{6}$ et $J = \frac{5}{4}$
3. Ranger dans l'ordre croissant : $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$.

Additionner et soustraire des fractions (5e)

Règle : pour additionner (ou soustraire) deux fractions, il faut qu'elles aient le **même dénominateur**. On additionne alors les numérateurs et on garde le dénominateur commun :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Comprendre : le dénominateur joue le rôle d'une unité. On n'additionne pas des mètres et des centimètres sans convertir ; de la même façon, on n'additionne pas des quarts et des tiers sans les ramener à la même unité (le même dénominateur).

Attention : l'erreur la plus fréquente (5e)

L'erreur $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ est l'une des plus répandues sur les fractions. Elle consiste à additionner séparément les numérateurs et les dénominateurs, comme si chaque « étage » de la fraction fonctionnait indépendamment.

Pourquoi c'est faux : si cette règle était correcte, on aurait $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Or une demie plus une demie, c'est un entier, pas une demie.

Ce qu'il faut faire : mettre au même dénominateur d'abord, puis additionner les numérateurs seulement :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$$

Additionner ou soustraire des fractions — Méthode (5e)

Quand les dénominateurs sont différents, on suit trois étapes :

1. trouver un dénominateur commun (le plus petit possible, c'est le PPCM) ;
2. transformer chaque fraction en fraction équivalente avec ce dénominateur commun ;
3. additionner (ou soustraire) les numérateurs, garder le dénominateur, puis simplifier si possible.

Exemples

- Calculer $A = \frac{2}{3} + \frac{5}{4}$:

$$A = \frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} + \frac{5 \times 3}{4 \times 3} \qquad \text{(dénominateur commun : 12)}$$
$$A = \frac{8}{12} + \frac{15}{12}$$
$$A = \frac{8+15}{12} = \frac{23}{12} \qquad \text{(on additionne les numérateurs)}$$

- Calculer $B = \frac{7}{6} - \frac{3}{4}$:

$$B = \frac{7}{6} - \frac{3}{4} = \frac{7 \times 2}{6 \times 2} - \frac{3 \times 3}{4 \times 3} \qquad \text{(dénominateur commun : 12)}$$
$$B = \frac{14}{12} - \frac{9}{12}$$
$$B = \frac{14-9}{12} = \frac{5}{12}$$

- Calculer $C = \frac{5}{6} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3}$:

$$C = \frac{5}{6} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{10}{12} + \frac{3}{12} - \frac{8}{12} \qquad \text{(dénominateur commun : 12)}$$
$$C = \frac{10+3-8}{12} = \frac{5}{12}$$

Exercice 7 *Additionner et soustraire des fractions (5e)*

1. Compléter chaque étape pour calculer $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}$:
   a) Le dénominateur commun de 4 et 5 est ...
   b) $\frac{3}{4} = \frac{3 \times \ldots}{4 \times \ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$
   c) $\frac{2}{5} = \frac{2 \times \ldots}{5 \times \ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$
   d) $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{\ldots}{\ldots} + \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$
2. Calculer en détaillant les étapes :

$A = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$ $\qquad B = \frac{7}{8} - \frac{1}{6}$ $\qquad C = \frac{5}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ $\qquad D = \frac{11}{6} - \frac{3}{4} - \frac{1}{3}$

3. **QCM piège.** Quel est le résultat de $\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$?

a) $\frac{5}{12}$ $\qquad$ b) $\frac{29}{35}$ $\qquad$ c) $\frac{6}{35}$ $\qquad$ d) $\frac{23}{35}$

Multiplier des fractions (4^e)

Règle : pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Comprendre : « $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ » signifie « prendre les deux tiers de trois quarts ». On partage les trois quarts en trois parts égales (on obtient des quarts divisés en trois, soit des douzièmes), puis on en prend deux : on obtient $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Astuce : on peut **simplifier avant de multiplier** (on dit « simplifier en croix »). On divise un numérateur et un dénominateur par le même nombre pour obtenir des nombres plus petits.

Exemples

- $A = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
  En simplifiant avant : $A = \frac{2}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (les deux 3 se simplifient).
- $B = \frac{5}{8} \times \frac{4}{15} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{8}_2} \times \frac{\cancel{4}^1}{\cancel{15}_3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ (on simplifie 5 avec 15 et 4 avec 8).

Exercice 8 *Multiplier des fractions (4^e)*

1. Compléter : $E = \frac{3}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{\ldots \times \ldots}{\ldots \times \ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$.
2. Calculer en simplifiant le résultat :

   $A = \frac{3}{7} \times \frac{2}{5}$ $\qquad B = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8}$ $\qquad C = \frac{5}{6} \times \frac{9}{10}$

3. Calculer : $D = \frac{2}{3} \times 7$. *Aide : écrire 7 sous forme de fraction.*

Diviser par une fraction (4^e–3^e)

Définition : l'**inverse** d'une fraction $\frac{a}{b}$ (avec $a \neq 0$) est la fraction $\frac{b}{a}$. Leur produit vaut 1 : $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = 1$.

Règle : diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Comprendre : « combien de parts de $\frac{1}{4}$ dans $\frac{3}{2}$? » revient à calculer $\frac{3}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{12}{2} = 6$. Il y a bien 6 quarts dans un entier et demi.

Pourquoi ça marche : diviser par $\frac{c}{d}$, c'est chercher combien de fois $\frac{c}{d}$ « rentre » dans le premier nombre. On peut écrire la division comme une fraction complexe, puis multiplier haut et bas par $\frac{d}{c}$ pour éliminer le dénominateur :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Diviser des fractions — Méthode (4e–3e)

1. On réécrit la division en multiplication par l'inverse de la deuxième fraction ;
2. on simplifie si possible (en croix) ;
3. on multiplie numérateurs et dénominateurs.

Exemples

- Calculer $A = \frac{3}{4} \div \frac{5}{8}$:

$$A = \frac{3}{4} \div \frac{5}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{5} \qquad \text{(on multiplie par l'inverse)}$$
$$A = \frac{3}{\cancel{4}_1} \times \frac{\cancel{8}^2}{5} \qquad \text{(on simplifie } 4 \text{ et } 8 \text{ par } 4\text{)}$$
$$A = \frac{3 \times 2}{1 \times 5} = \frac{6}{5}$$

- Calculer $B = \frac{7}{9} \div 3$:

$$B = \frac{7}{9} \div 3 = \frac{7}{9} \times \frac{1}{3} \qquad \text{(l'inverse de } 3 \text{ est } \frac{1}{3}\text{)}$$
$$B = \frac{7}{27}$$

- Calculer $C = 5 \div \frac{2}{3}$:

$$C = 5 \div \frac{2}{3} = \frac{5}{1} \times \frac{3}{2} \qquad \text{(on multiplie par l'inverse)}$$
$$C = \frac{15}{2}$$

Exercice 9 *Diviser des fractions (4e–3e)*

1. Compléter : l'inverse de $\frac{5}{3}$ est ... et l'inverse de 4 est ...
2. Compléter chaque étape pour calculer $\frac{2}{3} \div \frac{4}{9}$:
   a) L'inverse de $\frac{4}{9}$ est ...
   b) $\frac{2}{3} \div \frac{4}{9} = \frac{2}{3} \times \ldots = \frac{\ldots}{\ldots}$
   c) On simplifie : ...
3. Calculer en détaillant :
   a) $A = \frac{5}{6} \div \frac{10}{9}$
   b) $B = \frac{7}{4} \div 2$
   c) $C = 3 \div \frac{5}{7}$

Erreurs classiques

Erreur	Correction	Explication
$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{7}{12}$	On n'additionne pas les dénominateurs : il faut un dénominateur commun.
$\frac{1}{8}>\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}<\frac{1}{3}$	Plus le dénominateur est grand, plus les parts sont petites.
$\frac{3}{4}=3{,}4$	$\frac{3}{4}=0{,}75$	Une fraction n'est pas un « collage » de deux chiffres : c'est une division.
$\frac{5+3}{5}=3$	$\frac{5+3}{5}=\frac{8}{5}$	On ne peut pas « simplifier » un terme d'une somme avec le dénominateur.
$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$	$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$	Diviser, c'est multiplier par l'**inverse** : on retourne la deuxième fraction.

Enchaînement d'opérations avec fractions

Pour calculer une expression contenant plusieurs opérations avec des fractions, on respecte les mêmes priorités qu'avec les entiers :

1. effectuer les calculs entre parenthèses ;
2. effectuer les multiplications et les divisions (de gauche à droite) ;
3. effectuer les additions et les soustractions (après mise au même dénominateur).

Rédaction modèle : calculer $A=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$.

$$A=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$$
$$A=\frac{1}{2}+\frac{3\times 2}{4\times 5} \qquad \text{(multiplication en priorité)}$$
$$A=\frac{1}{2}+\frac{6}{20} \qquad \text{(on simplifie : } \frac{6}{20}=\frac{3}{10}\text{)}$$
$$A=\frac{5}{10}+\frac{3}{10} \qquad \text{(dénominateur commun : 10)}$$
$$A=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

Rédaction modèle : calculer $B=\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)\times\frac{9}{2}$.

$$B=\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)\times\frac{9}{2}$$
$$B=\left(\frac{5}{6}-\frac{2}{6}\right)\times\frac{9}{2} \qquad \text{(dénominateur commun dans la parenthèse)}$$
$$B=\frac{3}{6}\times\frac{9}{2} \qquad (5-2=3)$$
$$B=\frac{1}{2}\times\frac{9}{2} \qquad \text{(on simplifie } \frac{3}{6}=\frac{1}{2}\text{)}$$
$$B=\frac{9}{4}$$

Exercice 10 ***Enchaînement d'opérations (4ᵉ–3ᵉ)*** Calculer en détaillant les étapes et en simplifiant le résultat :

1. $A = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{6}{5}$
2. $B = \frac{5}{8} \times \frac{4}{3} - \frac{1}{6}$
3. $C = \left(\frac{7}{4} - \frac{3}{2}\right) \times \frac{8}{5}$
4. $D = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \div \frac{9}{8}$

Exercice 11 ***Vrai ou faux ?*** Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. $\frac{3}{5}$ est plus grand que $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{15}{25}$ est la forme irréductible de $\frac{45}{75}$.

C. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

D. $\frac{7}{3}$ est compris entre 2 et 3.

E. La fraction $\frac{0}{5}$ n'existe pas.

F. $\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = 1$.

G. Diviser par $\frac{1}{2}$, c'est la même chose que multiplier par 2.

H. $\frac{3+4}{3} = 1 + 4 = 5$.

Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche ***Que faire quand je bloque ?***
Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche ***Mémorisation et sciences cognitives****.*
Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton ***Carnet d'erreurs****.*

SOLUTIONS DES EXERCICES

Corrigé de l'exercice 1.

1.
   a) Dans $\frac{7}{5}$, le numérateur est 7 et le dénominateur est 5.
   b) $\frac{7}{5}$ signifie 7 divisé par 5.
   c) $\frac{7}{5} > 1$ car le numérateur (7) est supérieur au dénominateur (5). Quand on partage 7 en 5 parts, on obtient plus d'une unité entière.
2.
   a) Le quotient de 5 par 9 : $\frac{5}{9}$.
   b) Les trois quarts : $\frac{3}{4}$.
   c) Vingt-trois centièmes : $\frac{23}{100}$.
3. Oui, $\frac{4}{4}$ est une fraction (numérateur 4, dénominateur 4). Elle est égale à 1 car $4 \div 4 = 1$.

Corrigé de l'exercice 2.

1. On place les fractions en comptant les cinquièmes : $\frac{2}{5}$ est à 2 graduations, $\frac{4}{5}$ à 4 graduations, $\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5}$ à 7 graduations, $\frac{11}{5} = 2 + \frac{1}{5}$ à 11 graduations.
2. $\frac{7}{5}$ est compris entre 1 et 2 car $\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5}$.
3. $\frac{10}{5} = 10 \div 5 = 2$. La fraction $\frac{10}{5}$ est égale à l'entier 2.
4. On partage l'unité en 6 parts égales : $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ (deux sixièmes) et $\frac{1}{6}$ (un sixième). Sur la droite, $\frac{1}{3}$ est plus à droite que $\frac{1}{6}$, donc $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$. Plus le dénominateur est grand, plus les parts sont petites : un tiers est plus grand qu'un sixième.

Corrigé de l'exercice 3.

1.
   a) $11 = 4 \times 2 + 3$, donc $A = \frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4}$.
   b) $19 = 6 \times 3 + 1$, donc $B = \frac{19}{6} = 3 + \frac{1}{6}$.
   c) $23 = 7 \times 3 + 2$, donc $C = \frac{23}{7} = 3 + \frac{2}{7}$.
2.
   a) $D = 2 + \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{6+1}{3} = \frac{7}{3}$.
   b) $E = 4 + \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{20+3}{5} = \frac{23}{5}$.

Corrigé de l'exercice 4.

1.

a) $A = \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15}$.

b) $B = \frac{4}{7} = \frac{4 \times 3}{7 \times 3} = \frac{12}{21}$.

c) $C : \frac{9}{24} = \frac{9 \div 3}{24 \div 3} = \frac{3}{8}$, donc le numérateur est 3.

d) $D : \frac{20}{35} = \frac{20 \div 5}{35 \div 5} = \frac{4}{7}$, donc le dénominateur est 7.

2. On simplifie chaque fraction :
   - $\frac{6}{8} = \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}$: **oui**, c'est égal à $\frac{3}{4}$.
   - $\frac{9}{12} = \frac{9 \div 3}{12 \div 3} = \frac{3}{4}$: **oui**.
   - $\frac{15}{20} = \frac{15 \div 5}{20 \div 5} = \frac{3}{4}$: **oui**.
   - $\frac{4}{6} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3}$: **non**, c'est $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{4}$.
3. Il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur de $\frac{3}{4}$ par un même nombre entier non nul. Par exemple :
   - $\frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}$ (déjà dans la fiche) ; prenons plutôt $\frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{21}{28}$;
   - $\frac{3 \times 10}{4 \times 10} = \frac{30}{40}$.

   Toute réponse correcte est acceptée, à condition de vérifier que la simplification redonne bien $\frac{3}{4}$.

Corrigé de l'exercice 5.

1.

   a) Un diviseur commun de 24 et 36 est 12 (ou 2, 3, 4, 6).

   b) Avec 12 : $\frac{24}{36} = \frac{24 \div 12}{36 \div 12} = \frac{2}{3}$.

   c) 2 et 3 n'ont pas de diviseur commun autre que 1 : $\frac{2}{3}$ est irréductible.

2.

   a) $A = \frac{14}{21} = \frac{14 \div 7}{21 \div 7} = \frac{2}{3}$.

   b) $B = \frac{30}{48}$: le PGCD de 30 et 48 est 6, donc $B = \frac{30 \div 6}{48 \div 6} = \frac{5}{8}$.

   c) $C = \frac{36}{90}$: le PGCD de 36 et 90 est 18, donc $C = \frac{36 \div 18}{90 \div 18} = \frac{2}{5}$.

Corrigé de l'exercice 6.

1.

   a) Même dénominateur (11) : $4 < 7$ donc $A < B$, c'est-à-dire $\frac{4}{11} < \frac{7}{11}$.

   b) Même numérateur (3) : $5 < 8$ donc les cinquièmes sont plus grands que les huitièmes, d'où $C > D$, c'est-à-dire $\frac{3}{5} > \frac{3}{8}$.

   c) $E = \frac{9}{7} > 1$ (car $9 > 7$) et $F = \frac{5}{9} < 1$ (car $5 < 9$), donc $E > F$.

2.

a) Le dénominateur commun de 3 et 8 est 24 :

$$G = \frac{2}{3} = \frac{2 \times 8}{3 \times 8} = \frac{16}{24} \qquad H = \frac{5}{8} = \frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24}$$

$16 > 15$ donc $G > H$.

b) Le dénominateur commun de 6 et 4 est 12 :

$$I = \frac{7}{6} = \frac{7 \times 2}{6 \times 2} = \frac{14}{12} \qquad J = \frac{5}{4} = \frac{5 \times 3}{4 \times 3} = \frac{15}{12}$$

$14 < 15$ donc $I < J$.

3. On met au dénominateur commun 12 :

$$\frac{1}{2} = \frac{6}{12}\ ; \quad \frac{3}{4} = \frac{9}{12}\ ; \quad \frac{2}{3} = \frac{8}{12}\ ; \quad \frac{5}{6} = \frac{10}{12}$$

Rangement : $6 < 8 < 9 < 10$, donc : $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$.

Corrigé de l'exercice 7.

1.

a) Le dénominateur commun de 4 et 5 est 20.

b) $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}$.

c) $\frac{2}{5} = \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20}$.

d) $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{15}{20} + \frac{8}{20} = \frac{23}{20}$.

2.

a) $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$:

$$A = \frac{1 \times 5}{3 \times 5} + \frac{2 \times 3}{5 \times 3} \qquad \text{(dénominateur commun : 15)}$$

$$A = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$$

b) $B = \frac{7}{8} - \frac{1}{6}$:

$$B = \frac{7 \times 3}{8 \times 3} - \frac{1 \times 4}{6 \times 4} \qquad \text{(dénominateur commun : 24)}$$

$$B = \frac{21}{24} - \frac{4}{24} = \frac{17}{24}$$

c) $C = \frac{5}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$:

$$C = \frac{5 \times 4}{3 \times 4} + \frac{3 \times 3}{4 \times 3} - \frac{1 \times 6}{2 \times 6} \qquad \text{(dénominateur commun : 12)}$$

$$C = \frac{20}{12} + \frac{9}{12} - \frac{6}{12} = \frac{20 + 9 - 6}{12} = \frac{23}{12}$$

d) $D = \dfrac{11}{6} - \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{3}$:

$$D = \frac{11 \times 2}{6 \times 2} - \frac{3 \times 3}{4 \times 3} - \frac{1 \times 4}{3 \times 4} \qquad \text{(dénominateur commun : 12)}$$

$$D = \frac{22}{12} - \frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{22 - 9 - 4}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

3. **Réponse : (b)** $\dfrac{29}{35}$.

- L'option (a) $\dfrac{5}{12}$ correspond à l'erreur $\dfrac{2+3}{5+7}$: on a additionné numérateurs et dénominateurs séparément (biais du nombre entier).
- L'option (c) $\dfrac{6}{35}$ correspond à l'erreur $\dfrac{2 \times 3}{5 \times 7}$: on a multiplié au lieu d'additionner (confusion avec la règle de multiplication).
- L'option (d) $\dfrac{23}{35}$: erreur de calcul ($14 + 15 = 29$, pas 23).
- Le calcul correct : $\dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{7} = \dfrac{14}{35} + \dfrac{15}{35} = \dfrac{29}{35}$.

Corrigé de l'exercice 8.

1. $E = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{7}{4} = \dfrac{3 \times 7}{5 \times 4} = \dfrac{21}{20}$.
2.
   a) $A = \dfrac{3}{7} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{3 \times 2}{7 \times 5} = \dfrac{6}{35}$.

   b) $B = \dfrac{4}{9} \times \dfrac{3}{8}$: on simplifie 4 et 8 par 4, et 3 et 9 par 3 :

   $$B = \frac{\cancel{4}^{\,1}}{\cancel{9}_{\,3}} \times \frac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{8}_{\,2}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

   c) $C = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{9}{10}$: on simplifie 5 et 10 par 5, et 9 et 6 par 3 :

   $$C = \frac{\cancel{5}^{\,1}}{\cancel{6}_{\,2}} \times \frac{\cancel{9}^{\,3}}{\cancel{10}_{\,2}} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$
3. $D = \dfrac{2}{3} \times 7 = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{7}{1} = \dfrac{2 \times 7}{3 \times 1} = \dfrac{14}{3}$.

Corrigé de l'exercice 9.

1. L'inverse de $\dfrac{5}{3}$ est $\dfrac{3}{5}$; l'inverse de 4 est $\dfrac{1}{4}$.
2.
   a) L'inverse de $\dfrac{4}{9}$ est $\dfrac{9}{4}$.

   b) $\dfrac{2}{3} \div \dfrac{4}{9} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{9}{4} = \dfrac{2 \times 9}{3 \times 4} = \dfrac{18}{12}$.

   c) On simplifie par 6 : $\dfrac{18}{12} = \dfrac{18 \div 6}{12 \div 6} = \dfrac{3}{2}$.
3.

a) $A = \frac{5}{6} \div \frac{10}{9} = \frac{5}{6} \times \frac{9}{10}$:

$A = \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{6}_{2}} \times \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{10}_{2}}$ (on simplifie 5 et 10, puis 9 et 6)

$A = \frac{1 \times 3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$

b) $B = \frac{7}{4} \div 2 = \frac{7}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$.

c) $C = 3 \div \frac{5}{7} = \frac{3}{1} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{5}$.

Corrigé de l'exercice 10.

1. $A = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{6}{5}$:

$A = \frac{2}{3} + \frac{1 \times 6}{4 \times 5}$ (multiplication en priorité)

$A = \frac{2}{3} + \frac{6}{20} = \frac{2}{3} + \frac{3}{10}$ (on simplifie $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$)

$A = \frac{20}{30} + \frac{9}{30} = \frac{29}{30}$ (dénominateur commun : 30)

2. $B = \frac{5}{8} \times \frac{4}{3} - \frac{1}{6}$:

$B = \frac{5 \times 4}{8 \times 3} - \frac{1}{6}$ (multiplication en priorité)

$B = \frac{20}{24} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$ (on simplifie $\frac{20}{24} = \frac{5}{6}$)

$B = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

3. $C = \left(\frac{7}{4} - \frac{3}{2}\right) \times \frac{8}{5}$:

$C = \left(\frac{7}{4} - \frac{6}{4}\right) \times \frac{8}{5}$ (parenthèse en priorité : $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$)

$C = \frac{1}{4} \times \frac{8}{5}$ $(7 - 6 = 1)$

$C = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

4. $D = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \div \frac{9}{8}$:

$D = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{8}{9}$ (division en priorité : on multiplie par l'inverse)

$D = \frac{1}{2} + \frac{24}{36} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ (on simplifie $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$)

$D = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$ (dénominateur commun : 6)

Corrigé de l'exercice 11.

A. Faux. Même numérateur (3) et $5 > 4$, donc les cinquièmes sont plus petits que les quarts : $\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$.

B. Faux. $\frac{15}{25} = \frac{15 \div 5}{25 \div 5} = \frac{3}{5}$: $\frac{15}{25}$ n'est pas irréductible. La fraction irréductible de $\frac{45}{75}$ est $\frac{3}{5}$ (on divise par 15).

C. Faux. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (même dénominateur : on additionne les numérateurs, on garde le dénominateur). L'erreur $\frac{2}{6}$ vient de l'addition des dénominateurs.

D. Vrai. $\frac{6}{3} = 2$ et $\frac{9}{3} = 3$; or $6 < 7 < 9$, donc $2 < \frac{7}{3} < 3$.

E. Faux. $\frac{0}{5} = 0 \div 5 = 0$. C'est $\frac{5}{0}$ qui n'existe pas (on ne divise pas par zéro).

F. Vrai. $\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{4 \times 5}{5 \times 4} = \frac{20}{20} = 1$. Ces deux fractions sont inverses l'une de l'autre.

G. Vrai. Diviser par $\frac{1}{2}$, c'est multiplier par l'inverse de $\frac{1}{2}$, soit $\frac{2}{1} = 2$. Diviser par $\frac{1}{2}$ revient donc à multiplier par 2.

H. Faux. $\frac{3+4}{3} = \frac{7}{3}$. On ne peut pas « simplifier » un terme d'une somme au numérateur avec le dénominateur. L'erreur vient de la confusion avec $\frac{3 \times 4}{3} = 4$ (là, la simplification est légitime car c'est un produit).