

La fonction exponentielle

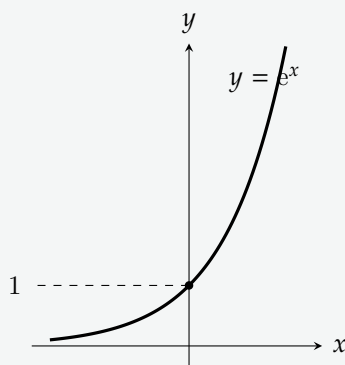
La fonction exponentielle est la fonction qui décrit toutes les évolutions à vitesse proportionnelle à la quantité présente : intérêts composés, croissance d'une population, désintégration radioactive. Elle se reconnaît à une propriété unique : elle est égale à sa propre dérivée. On la note e^x , elle est toujours strictement positive et strictement croissante. La difficulté principale est de manipuler ses propriétés algébriques sans les confondre avec celles des puissances usuelles.

Définition (1^{re})

La **fonction exponentielle**, notée \exp , est l'unique fonction dérivable sur \mathbb{R} qui vérifie

$$\exp' = \exp \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1.$$

On note $\exp(x) = e^x$, où $e = \exp(1) \approx 2,718$. Sa dérivée est elle-même : si $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$.



Propriétés algébriques (1^{re})

Pour tous réels a et b et tout entier n :

Propriété	Formule
Produit	$e^a \times e^b = e^{a+b}$
Inverse	$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
Quotient	$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
Puissance	$(e^a)^n = e^{na}$

Exemple. $e^{3x} \times e^{-x} = e^{3x+(-x)} = e^{2x}$. $\frac{e^5}{e^2} = e^{5-2} = e^3$. $(e^x)^3 = e^{3x}$.

Signe et variations (1^{re})

Pour tout réel x , $e^x > 0$: la fonction exponentielle est **toujours strictement positive**. Comme sa dérivée e^x est elle aussi strictement positive, la fonction exponentielle est **strictement croissante** sur \mathbb{R} . Sa courbe passe par le point $(0 ; 1)$ et reste au-dessus de l'axe des abscisses.

Méthode : équations et inéquations

La fonction exponentielle étant strictement croissante, pour tous réels a et b :

$$e^a = e^b \iff a = b \quad \text{et} \quad e^a < e^b \iff a < b.$$

On se ramène donc à une équation (ou une inéquation) du premier degré sur les exposants.

Exemple. Résoudre $e^{2x-1} = e^5$. Puisque l'exponentielle est strictement croissante : $e^{2x-1} = e^5 \iff 2x - 1 = 5 \iff x = 3$.

Résoudre $e^x > 1$. Comme $1 = e^0$, on a $e^x > e^0 \iff x > 0$. L'ensemble des solutions est $]0 ; +\infty[$.

Exercice 1 *Simplifier avec les propriétés* Écrire chaque expression sous la forme e^k ou e^{kx} .

a) $e^4 \times e^{-1}$

b) $\frac{e^7}{e^3}$

c) $(e^{2x})^3$

d) $\frac{e^{5x} \times e^x}{e^{2x}}$

Exercice 2 *Résoudre des équations et des inéquations* Résoudre dans \mathbb{R} .

1. $e^{3x-2} = e^{x+4}$.
2. $e^x = 1$.
3. $e^{2x} \leq e^6$.

Exercice 3 *Synthèse (4 points)* Une population de bactéries, en milliers, est modélisée par $P(t) = 1000 e^{0,1t}$, où t est le temps en heures.

1. Calculer la population initiale $P(0)$.
2. Calculer $P(10)$ (arrondir à l'unité).
3. Expliquer, sans dérivée, pourquoi la population est strictement croissante.

Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Multiplier les exposants au lieu de les additionner	$e^a \times e^b = e^{ab}$	$e^a \times e^b = e^{a+b}$
Croire que e^x peut être nul ou négatif	$e^x = 0$ a une solution	$e^x > 0$ toujours, jamais nul
Confondre e^{a-b} et $e^a - e^b$	$\frac{e^a}{e^b} = e^a - e^b$	$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
Oublier que $1 = e^0$	« $e^x = 1$ impossible »	$e^x = e^0 \iff x = 0$

SOLUTIONS DES EXERCICES

Corrigé de l'exercice 1.

1. $e^4 \times e^{-1} = e^{4+(-1)} = e^3$.
2. $\frac{e^7}{e^3} = e^{7-3} = e^4$.
3. $(e^{2x})^3 = e^{2x \times 3} = e^{6x}$.
4. $\frac{e^{5x} \times e^x}{e^{2x}} = \frac{e^{6x}}{e^{2x}} = e^{6x-2x} = e^{4x}$.

Corrigé de l'exercice 2.

1. $e^{3x-2} = e^{x+4} \iff 3x - 2 = x + 4 \iff 2x = 6 \iff x = 3$.
2. Comme $1 = e^0$, $e^x = e^0 \iff x = 0$.
3. $e^{2x} \leq e^6 \iff 2x \leq 6 \iff x \leq 3$. L'ensemble des solutions est $]-\infty ; 3]$.

Corrigé de l'exercice 3.

1. $P(0) = 1000 e^0 = 1000 \times 1 = 1000$ (en milliers).
2. $P(10) = 1000 e^{0,1 \times 10} = 1000 e^1 \approx 1000 \times 2,718 \approx 2718$.
3. Lorsque t augmente, l'exposant $0,1 t$ augmente aussi ; or la fonction exponentielle est strictement croissante, donc $e^{0,1t}$ augmente, et $P(t)$ également. La population est donc strictement croissante.