Maîtriser le théorème de Thalès

Une fiche d'exercices pour reconnaître la configuration, écrire les rapports, distinguer direct et réciproque

1 Pourquoi cette fiche ?

Le théorème de Thalès est un outil puissant, mais sa mise en (oe)uvre exige de la rigueur à plusieurs niveaux. Il faut savoir reconnaître la configuration sans se laisser piéger par l'orientation ou la forme de la figure (configuration en triangle, mais aussi en papillon). Il faut écrire les rapports correctement, sans mélanger les longueurs portées par les deux sécantes. Il faut vérifier les conditions d'application (alignement des points, parallélisme des droites) au lieu d'appliquer le théorème mécaniquement. Et il faut distinguer ce que l'on démontre : une longueur (théorème direct), un parallélisme (réciproque), un non-parallélisme (contraposée).

Cette fiche aborde le théorème de Thalès en proposant une rédaction-type stable, en variant systématiquement les configurations, et en démasquant les erreurs les plus tenaces.

2 Une situation motivante

Remarque 1 (Mesurer une distance inaccessible). Un usage historique du théorème de Thalès est de mesurer des distances inaccessibles. Imaginons que l'on veuille connaître la largeur d'une rivière sans la traverser. On peut placer trois alignements de points soigneusement choisis, mesurer ce qui est accessible, et utiliser le théorème pour calculer ce qui ne l'est pas.
C'est dans ce type de problème que le théorème prend tout son sens : il transforme une mesure impossible en un calcul élémentaire à partir de mesures accessibles. Avant d'apprendre à manipuler la formule, il est utile de garder en tête à quoi elle sert.

Exercice 1 *Hauteur d'un arbre* Pour mesurer la hauteur d'un arbre sans le couper, on place un piquet vertical de $1{,}5$ m de haut à une certaine distance de l'arbre. Un observateur, allongé au sol, voit le sommet du piquet et le sommet de l'arbre alignés selon une même droite passant par ses yeux. Il mesure les distances suivantes :

- de ses yeux jusqu'au pied du piquet : 2 m ;
- de ses yeux jusqu'au pied de l'arbre : 14 m.

Le piquet et l'arbre sont parallèles (tous deux verticaux). Calculer la hauteur de l'arbre, à $0{,}1$ m près.

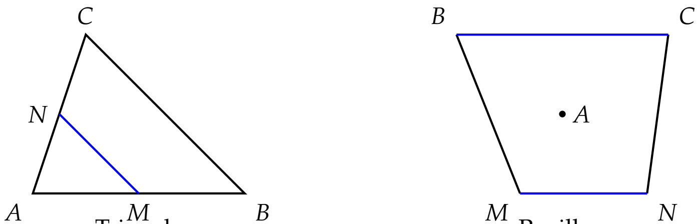
3 La configuration de Thalès

Remarque 2 (Deux configurations à reconnaître, pas une). Le théorème de Thalès s'applique dès qu'on a deux droites sécantes en un point A, et deux droites parallèles coupant ces sécantes. Selon la position des parallèles par rapport au point A, deux configurations apparaissent.
Configuration en triangle. Les deux parallèles sont du même côté du point A. Les sécantes partent de A et coupent successivement la première parallèle (en M et N), puis la deuxième (en B et C).
Configuration en papillon. Les deux parallèles sont de part et d'autre du point A. Les sécantes se croisent en A, et coupent une parallèle d'un côté, l'autre parallèle du côté opposé.

Dans les deux cas, le théorème donne la même proportionnalité :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Mais l'orientation visuelle est différente. Reconnaître les deux configurations est indispensable pour ne pas être pris au dépourvu par une figure non standard.



Triangle

Papillon

Exercice 2 *Triangle ou papillon ?* Pour chaque description, indiquer s'il s'agit de la configuration en triangle ou en papillon.

a) Deux droites se coupent en A ; une parallèle à (BC) coupe les deux sécantes en deux points situés entre A et la parallèle (BC).
b) Deux droites se coupent en A ; deux parallèles entre elles sont situées de part et d'autre de A.
c) Dans un triangle ABC, on trace une parallèle à (BC) qui coupe $[AB]$ et $[AC]$ en M et N.
d) Deux segments $[BC]$ et $[MN]$ sont parallèles, et les segments $[BM]$ et $[CN]$ se coupent en A situé entre eux.

4 Calculer une longueur (théorème direct)

Remarque 3 (Une rédaction-type à apprendre). La rédaction du théorème direct suit toujours les mêmes étapes. L'apprendre comme un **schéma stable** permet de l'appliquer sans hésiter, quelle que soit la figure.

1. Identifier le sommet commun aux deux sécantes (souvent appelé A).
2. Vérifier que les points sont bien alignés sur chaque sécante : A, M, B d'une part ; A, N, C d'autre part.
3. Vérifier que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
4. Écrire les trois rapports égaux : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.
5. Choisir les deux rapports utiles, écrire l'égalité, résoudre.

Erreur classique : l'inversion des rapports. L'élève écrit $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$ en mélangeant les longueurs portées par les deux sécantes. La règle est : dans un même rapport, on ne mélange jamais les sécantes. Toutes les longueurs au numérateur portent une lettre commune (souvent A), et le dénominateur de chaque fraction porte la même sécante que son numérateur.

Exercice 3 *Calculer une longueur dans une configuration triangle* Dans un triangle ABC, on place M sur $[AB]$ et N sur $[AC]$ tels que (MN) est parallèle à (BC). On donne $AM = 3$, $AB = 8$, $AC = 12$ et $BC = 14$.

a) Identifier la configuration et énoncer les conditions du théorème.
b) Écrire les trois rapports égaux.
c) Calculer AN.
d) Calculer MN.

Exercice 4 *Calculer dans une configuration papillon* Les droites (BM) et (CN) se coupent en A. On a (BC) parallèle à (MN), et les longueurs suivantes : $AB = 4$, $AM = 6$, $BC = 5$, $AC = 7$.

a) Vérifier que la configuration est celle de Thalès en papillon.
b) Écrire les trois rapports égaux.
c) Calculer AN.
d) Calculer MN.

Exercice 5 *Démasquer l'inversion des rapports* Voici la production d'un élève. Dans la configuration en triangle de l'exercice précédent, il écrit :

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}.$$

a) Identifier précisément l'erreur.
b) Donner l'écriture correcte.

5 Démontrer un parallélisme (réciproque)

Remarque 4 (La réciproque du théorème de Thalès). La réciproque permet de démontrer qu'une droite est **parallèle** à une autre. Elle s'énonce ainsi.
Réciproque. Si les points A, M, B sont alignés dans cet ordre, si les points A, N, C sont alignés dans cet ordre, et si l'on a $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
Attention : l'ordre d'alignement importe. La réciproque suppose que M est entre A et B (ou que A est entre M et B pour la configuration papillon, mais avec cohérence). Sans cette condition, l'égalité de rapports ne suffit pas à conclure au parallélisme.
Rédaction-type. On commence par calculer séparément les deux rapports, on compare, et l'on conclut. Le calcul des deux membres comme des fractions distinctes (et non en posant l'égalité a priori) est essentiel.

Exercice 6 *Parallèle ou non ?* Pour chaque configuration, dire si (MN) est parallèle à (BC). Justifier par la réciproque ou la contraposée du théorème de Thalès.

a) A, M, B alignés dans cet ordre avec $AM = 4$, $AB = 10$; A, N, C alignés dans cet ordre avec $AN = 6$, $AC = 15$.
b) A, M, B alignés avec $AM = 5$, $AB = 8$; A, N, C alignés avec $AN = 7$, $AC = 12$.
c) A, M, B alignés avec $AM = 3$, $AB = 9$; A, N, C alignés avec $AN = 4$, $AC = 12$.
d) A, M, B alignés avec $AM = 2$, $AB = 5$; A, N, C alignés avec $AN = 3$, $AC = 8$.

Exercice 7 *Démasquer la confusion direct/réciproque* Voici deux productions d'élèves. Pour chacune, dire si elle est correcte. Sinon, identifier l'erreur de logique.

a) « Dans le triangle ABC avec M sur $[AB]$ et N sur $[AC]$, on a $AM = 3$, $AB = 8$, $AC = 12$. Comme $(MN) \parallel (BC)$, le théorème de Thalès donne $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, donc $AN = 4{,}5$. »
b) « Dans la même configuration, on a $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, donc, par le théorème de Thalès, (MN) est parallèle à (BC). »

⑥ Pour s'auto-évaluer

Remarque 5 (Cinq questions à se poser). Avant et pendant l'usage du théorème de Thalès, prendre l'habitude de se poser ces cinq questions.

- Quelle configuration vois-je : triangle ou papillon ?
- Les conditions sont-elles réunies (alignement des points, parallélisme des droites) ?
- Lorsque j'écris les rapports, ai-je bien gardé chaque sécante de bout en bout (numérateur et dénominateur sur la même sécante) ?
- Suis-je en train d'utiliser le théorème direct (calculer une longueur), la réciproque (démontrer un parallélisme) ou la contraposée (démontrer un non-parallélisme) ?
- Ma rédaction nomme-t-elle clairement le théorème invoqué et énumère-t-elle les hypothèses utilisées ?