MATHÉMATIQUES

Maîtriser les suites numériques

Une fiche d'exercices pour calculer des termes, reconnaître la nature d'une suite et étudier ses variations

① POURQUOI CETTE FICHE ?

Une suite décrit une évolution par étapes. Deux familles reviennent partout : les suites **arithmétiques**, où l'on ajoute toujours le même nombre, et les suites **géométriques**, où l'on multiplie toujours par le même nombre. La principale difficulté est de ne pas les confondre, et de bien distinguer une suite définie *explicitement* (par une formule en n) d'une suite définie *par récurrence* (chaque terme à partir du précédent).

Cette fiche reprend chaque savoir-faire : calculer des termes, reconnaître la nature d'une suite, utiliser les formules des suites arithmétiques et géométriques, étudier le sens de variation, et résoudre un problème concret.

② CALCULER LES TERMES D'UNE SUITE

Remarque 1 (Explicite ou par récurrence). Si u_n est donné par une formule en n (forme explicite), on remplace directement n par sa valeur. Si la suite est définie par récurrence (u_{n+1} en fonction de u_n), il faut calculer les termes de proche en proche.

Exercice 1 *Calculer des termes*

a) $u_n = 2n^2 - 3$. Calculer u_0, u_1 et u_4.
b) $v_0 = 5$ et $v_{n+1} = 2v_n + 1$. Calculer v_1, v_2 et v_3.
c) $w_n = \dfrac{n-1}{n+1}$. Calculer w_0, w_1 et w_2.

③ RECONNAÎTRE LA NATURE D'UNE SUITE

Remarque 2 (Différences ou quotients constants). On calcule les différences entre termes consécutifs : si elles sont toutes égales, la suite est arithmétique (la valeur commune est la raison r). Sinon, on calcule les quotients : s'ils sont tous égaux, la suite est géométrique (la valeur commune est la raison q). Si ni l'un ni l'autre, la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

Exercice 2 *Quelle nature ?* Pour chaque suite, calculer les premiers termes et préciser sa nature.

a) $u_n = 4n - 1$
b) $v_n = 3 \times 2^n$
c) $w_n = n^2 + 1$

4 SUITES ARITHMÉTIQUES

Remarque 3 (Terme général d'une suite arithmétique). Pour une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r : $u_n = u_0 + n\,r$. Cette formule permet de calculer n'importe quel terme sans passer par tous les précédents, et de retrouver le rang d'un terme donné.

Exercice 3 *Utiliser le terme général*

a) (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $r = -2$. Exprimer u_n, puis calculer u_{10}.
b) (v_n) est arithmétique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $r = 5$. Déterminer le rang n tel que $v_n = 48$.

5 SUITES GÉOMÉTRIQUES

Remarque 4 (Terme général d'une suite géométrique). Pour une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q : $u_n = u_0 \times q^n$. Attention à ne pas confondre avec $u_0 \times q \times n$: c'est bien q **à la puissance** n.

Exercice 4 *Utiliser le terme général*

a) (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$. Exprimer u_n, puis calculer u_5.
b) (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 64$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. Exprimer v_n, puis calculer v_4.

6 SENS DE VARIATION

Remarque 5 (Comparer à la raison). Une suite arithmétique est croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$. Une suite géométrique de premier terme positif est croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$. On peut aussi étudier directement le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 5 *Croissante ou décroissante ?* Préciser le sens de variation de chaque suite, en justifiant.

a) $u_n = 5 - 3n$
b) (v_n) géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = 1{,}5$
c) (w_n) géométrique de premier terme $w_0 = 100$ et de raison $q = 0{,}8$

7 UN PROBLÈME CONCRET

Remarque 6 (Reconnaître la bonne famille). Une évolution « + une même quantité » à chaque étape se modélise par une suite **arithmétique** ; une évolution « × un même coefficient » (un pourcentage) à chaque étape se modélise par une suite **géométrique**.

Exercice 6 *Salaire et valeur d'une voiture*

a) Un salaire mensuel est de 1800 € au départ et augmente de 60 € chaque année. On note S_n le salaire après n années. Justifier que (S_n) est arithmétique, exprimer S_n, puis calculer S_5.
b) Une voiture vaut 18 000 € et perd 15 % de sa valeur chaque année. On note V_n sa valeur après n années. Justifier que (V_n) est géométrique, exprimer V_n, puis calculer V_3 (arrondir à l'euro).

8 POUR S'AUTO-ÉVALUER

Remarque 7 (Cinq questions à se poser). Avant et pendant un exercice sur les suites, prendre l'habitude de se poser ces cinq questions.

- La suite est-elle donnée explicitement (formule en n) ou par récurrence (terme suivant à partir du précédent) ?
- Pour reconnaître la nature, ai-je comparé les **différences** (arithmétique) puis les **quotients** (géométrique) ?
- Pour une suite géométrique, ai-je bien écrit $u_0 \times q^n$ (puissance) et non $u_0 \times q \times n$?
- Pour le sens de variation, ai-je comparé r à 0, ou q à 1 (avec un premier terme positif) ?
- Dans un problème, l'évolution est-elle additive (arithmétique) ou multiplicative, c'est-à-dire en pourcentage (géométrique) ?

SOLUTIONS DES EXERCICES

Corrigé de l'exercice 1.

a) $u_0 = 2\times 0 - 3 = -3$; $u_1 = 2\times 1 - 3 = -1$; $u_4 = 2\times 16 - 3 = 29$.

b) $v_1 = 2\times 5 + 1 = 11$; $v_2 = 2\times 11 + 1 = 23$; $v_3 = 2\times 23 + 1 = 47$.

c) $w_0 = \dfrac{-1}{1} = -1$; $w_1 = \dfrac{0}{2} = 0$; $w_2 = \dfrac{1}{3}$.

Corrigé de l'exercice 2.

a) $u_0 = -1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 7$, $u_3 = 11$: les différences valent 4, la suite est arithmétique de raison $r = 4$.

b) $v_0 = 3$, $v_1 = 6$, $v_2 = 12$, $v_3 = 24$: chaque terme est le double du précédent, la suite est géométrique de raison $q = 2$.

c) $w_0 = 1$, $w_1 = 2$, $w_2 = 5$, $w_3 = 10$: les différences $(1, 3, 5)$ ne sont pas constantes et les quotients non plus : la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

Corrigé de l'exercice 3.

a) $u_n = 7 - 2n$, donc $u_{10} = 7 - 2\times 10 = -13$.

b) $v_n = 3 + 5n$. On résout $3 + 5n = 48 \iff 5n = 45 \iff n = 9$. Donc $v_9 = 48$.

Corrigé de l'exercice 4.

a) $u_n = 2\times 3^n$, donc $u_5 = 2\times 3^5 = 2\times 243 = 486$.

b) $v_n = 64\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, donc $v_4 = 64\times\dfrac{1}{16} = 4$.

Corrigé de l'exercice 5.

a) (u_n) est arithmétique de raison $r = -3 < 0$: elle est décroissante.

b) $v_0 = 2 > 0$ et $q = 1{,}5 > 1$: la suite est croissante.

c) $w_0 = 100 > 0$ et $0 < q = 0{,}8 < 1$: la suite est décroissante.

Corrigé de l'exercice 6.

a) Chaque année, on ajoute le même montant 60 : (S_n) est arithmétique de premier terme $\mathrm{S}_0 = 1800$ et de raison $r = 60$. Donc $\mathrm{S}_n = 1800 + 60n$, et $\mathrm{S}_5 = 1800 + 60\times 5 = 2100$ €.

b) Perdre $15\,\%$ revient à multiplier par $1 - 0{,}15 = 0{,}85$ chaque année : (V_n) est géométrique de premier terme $\mathrm{V}_0 = 18\,000$ et de raison $q = 0{,}85$. Donc $\mathrm{V}_n = 18\,000\times 0{,}85^n$, et $\mathrm{V}_3 = 18\,000\times 0{,}85^3 = 18\,000\times 0{,}614125 \approx 11\,054$ €.