MATHÉMATIQUES

Maîtriser le second degré

Une fiche d'exercices pour calculer un discriminant, résoudre, factoriser et étudier le signe d'un trinôme

① POURQUOI CETTE FICHE ?

Le second degré repose sur un seul outil, le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, mais cet outil répond à trois questions différentes que l'on confond souvent : combien l'équation a-t-elle de solutions, comment factoriser le trinôme, et quel est son signe. La plupart des erreurs ne viennent pas du calcul de Δ, mais d'une mauvaise lecture de la question posée, ou d'une faute de signe sur b^2 ou sur le coefficient a.

Cette fiche reprend chaque savoir-faire séparément, du plus simple (identifier les coefficients) au plus complet (résoudre une inéquation, mettre un problème en équation). Travaille chaque exercice sans calculatrice quand c'est possible, et vérifie systématiquement tes solutions.

② RECONNAÎTRE UN TRINÔME ET SES COEFFICIENTS

Remarque 1 (Identifier a, b et c). Un trinôme du second degré s'écrit $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Avant tout calcul, il faut repérer les trois coefficients **avec leur signe**, et penser aux coefficients nuls : dans $2x^2 - x$, on a $b = -1$ et $c = 0$; dans $5 - 2x^2$, on a $a = -2$, $b = 0$ et $c = 5$.

Exercice 1 *Donner les coefficients* Pour chaque trinôme, donner a, b et c.

a) $3x^2 - 5x + 2$
b) $-x^2 + 4$
c) $2x^2 - x$
d) $5 - 2x^2$

③ CALCULER LE DISCRIMINANT

Remarque 2 (Le discriminant donne le nombre de racines). On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$, en faisant bien attention : b^2 est toujours positif (le carré d'un nombre négatif est positif). Ensuite : si $\Delta > 0$, deux racines ; si $\Delta = 0$, une racine double ; si $\Delta < 0$, aucune racine réelle.

Exercice 2 *Discriminant et nombre de racines* Calculer Δ et préciser le nombre de racines.

a) $x^2 - 7x + 10$
b) $x^2 - 6x + 9$
c) $x^2 + x + 1$
d) $2x^2 + 3x - 2$

④ RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Remarque 3 (La méthode en trois temps). On identifie a, b, c ; on calcule Δ ; puis on conclut. Si $\Delta > 0$, les racines sont $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Si $\Delta = 0$, la racine double est $x_0 = \frac{-b}{2a}$. Bien diviser par $2a$, et non par a.

Exercice 3 ***Résoudre et vérifier*** Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$
b) $2x^2 - 5x + 3 = 0$
c) $x^2 - 4x + 4 = 0$
d) $x^2 + x + 1 = 0$

⑤ FACTORISER UN TRINÔME

Remarque 4 (La factorisation passe par les racines). Si $\Delta > 0$ avec les racines x_1 et x_2, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Si $\Delta = 0$ avec la racine double x_0, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$. Si $\Delta < 0$, le trinôme ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 ***Factoriser quand c'est possible*** Factoriser les trinômes suivants.

a) $x^2 - 7x + 10$
b) $2x^2 - 5x + 3$
c) $x^2 - 6x + 9$
d) $x^2 + x + 1$

⑥ ÉTUDIER LE SIGNE D'UN TRINÔME

Remarque 5 (Du signe de a au signe du trinôme). Lorsque $\Delta > 0$, le trinôme est du **signe de a à l'extérieur des racines**, et du signe contraire entre les racines. Lorsque $\Delta = 0$, il est du signe de a partout, et s'annule en la racine double. Lorsque $\Delta < 0$, il est du signe de a sur $\mathbb{R}$ tout entier (il ne s'annule jamais).

Exercice 5 ***Étudier le signe suivant les valeurs de x*** Étudier le signe des trinômes suivants.

a) $x^2 - 7x + 10$
b) $-x^2 + 4x - 3$
c) $2x^2 + 3$

⑦ RÉSOUDRE UNE INÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Remarque 6 (Une inéquation se résout grâce au signe). Pour résoudre une inéquation comme $ax^2 + bx + c > 0$, on étudie d'abord le signe du trinôme, puis on lit l'ensemble des x qui conviennent. Attention aux bornes : $>$ et $<$ donnent des intervalles ouverts, $\geqslant$ et $\leqslant$ incluent les racines.

Exercice 6 ***Résoudre l'inéquation*** Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $x^2 - 7x + 10 > 0$
b) $-x^2 + 4x - 3 \geqslant 0$
c) $x^2 - 6x + 9 > 0$

8 METTRE EN ÉQUATION UN PROBLÈME

Remarque 7 (Traduire, résoudre, revenir au contexte). On choisit l'inconnue, on traduit l'énoncé par une équation du second degré, on résout, puis on garde **seulement les solutions qui ont un sens** dans le contexte (par exemple une longueur ne peut pas être négative).

Exercice 7 ***Petits problèmes*** Résoudre chaque problème en posant une équation.

a) Un rectangle a une aire de 40 cm^2. Sa longueur mesure 3 cm de plus que sa largeur. Quelles sont ses dimensions ?
b) On lance une balle verticalement. Sa hauteur, en mètres, est donnée par $h(t) = -5t^2 + 20t$, où t est le temps en secondes. Au bout de combien de temps la balle retombe-t-elle au sol ?
c) Trouver un nombre dont le carré diminué de ce nombre vaut 12.

9 POUR S'AUTO-ÉVALUER

Remarque 8 (Cinq questions à se poser). Avant et pendant la résolution d'un exercice sur le second degré, prendre l'habitude de se poser ces cinq questions.

- Ai-je bien identifié a, b et c avec leur signe, sans oublier les coefficients nuls ?
- Quelle question m'est posée : résoudre, factoriser, ou étudier le signe ? L'outil est le même (Δ), mais la conclusion diffère.
- Dans $\Delta = b^2 - 4ac$, ai-je bien élevé b au carré (résultat positif) et respecté le signe de a et de c ?
- Pour résoudre, ai-je divisé par $2a$ (et non par a) ? Pour le signe, ai-je utilisé le signe de a ?
- Si le problème vient d'un contexte concret, ai-je éliminé les solutions qui n'ont pas de sens (longueur ou durée négative) ?

SOLUTIONS DES EXERCICES

Corrigé de l'exercice 1.

a) $a = 3, b = -5, c = 2$.
b) $a = -1, b = 0, c = 4$.
c) $a = 2, b = -1, c = 0$.
d) $a = -2, b = 0, c = 5$.

Corrigé de l'exercice 2.

a) $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9 > 0$: deux racines.
b) $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 36 - 36 = 0$: une racine double.
c) $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$: aucune racine réelle.
d) $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$: deux racines.

Corrigé de l'exercice 3.

a) $\Delta = 49 - 40 = 9$, $\sqrt{\Delta} = 3$. $x_1 = \dfrac{7-3}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{7+3}{2} = 5$. $S = \{2\ ;\ 5\}$. Vérification : $2^2 - 7 \times 2 + 10 = 0$. ✓
b) $\Delta = 25 - 24 = 1$, $\sqrt{\Delta} = 1$. $x_1 = \dfrac{5-1}{4} = 1$ et $x_2 = \dfrac{5+1}{4} = \dfrac{3}{2}$. $S = \left\{1\ ;\ \dfrac{3}{2}\right\}$.
c) $\Delta = 16 - 16 = 0$. Racine double $x_0 = \dfrac{4}{2} = 2$. $S = \{2\}$.
d) $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$: aucune solution réelle, $S = \varnothing$.

Corrigé de l'exercice 4.

a) Les racines sont 2 et 5, donc $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$.
b) Les racines sont 1 et $\dfrac{3}{2}$, donc $2x^2 - 5x + 3 = 2(x-1)\left(x - \dfrac{3}{2}\right) = (x-1)(2x-3)$.
c) Racine double 3, donc $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.
d) $\Delta = -3 < 0$: le trinôme n'a pas de racine réelle, il ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 5.

a) Les racines sont 2 et 5, et $a = 1 > 0$: le trinôme est donc positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles, ce que résume le tableau de signes :

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$x^2 - 7x + 10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) Le discriminant est $\Delta = 16 - 12 = 4$, les racines sont 1 et 3, et $a = -1 < 0$: le trinôme est donc négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-x^2 + 4x - 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c) $\Delta = 0^2 - 4 \times 2 \times 3 = -24 < 0$ et $a = 2 > 0$: le trinôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$ (il ne s'annule jamais).

Corrigé de l'exercice 6.

a) D'après le signe étudié plus haut, $x^2 - 7x + 10 > 0$ sur $]-\infty\ ;\ 2[\cup]5\ ;\ +\infty[$.
b) $-x^2 + 4x - 3 \geqslant 0$ sur $[1\ ;\ 3]$ (les racines sont incluses car l'inégalité est large).
c) $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ est positif partout et nul seulement en 3. L'inéquation stricte > 0 est donc vraie pour tout $x \neq 3$, soit $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Corrigé de l'exercice 7.

a) Soit ℓ la largeur en cm. La longueur est $\ell + 3$ et l'aire $\ell(\ell + 3) = 40$, soit $\ell^2 + 3\ell - 40 = 0$. $\Delta = 9 + 160 = 169$, $\sqrt{\Delta} = 13$. Les racines sont $\dfrac{-3-13}{2} = -8$ et $\dfrac{-3+13}{2} = 5$. Une largeur étant positive, on garde $\ell = 5$: la largeur mesure 5 cm et la longueur 8 cm. Vérification : $5 \times 8 = 40$. ✓
b) On résout $h(t) = 0$, soit $-5t^2 + 20t = 0$. On factorise : $-5t(t-4) = 0$, donc $t = 0$ ou $t = 4$. L'instant $t = 0$ est le lancer ; la balle retombe au sol à $t = 4$ secondes.
c) Soit x le nombre cherché. On traduit : $x^2 - x = 12$, soit $x^2 - x - 12 = 0$. $\Delta = 1 + 48 = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$. Les solutions sont $\dfrac{1-7}{2} = -3$ et $\dfrac{1+7}{2} = 4$. Il y a deux nombres possibles : -3 et 4. Vérification : $(-3)^2 - (-3) = 9 + 3 = 12$ et $4^2 - 4 = 12$. ✓