

Maîtriser les nombres relatifs

Une fiche d'exercices pour donner du sens aux nombres négatifs et au signe « - »

① POURQUOI CETTE FICHE ?

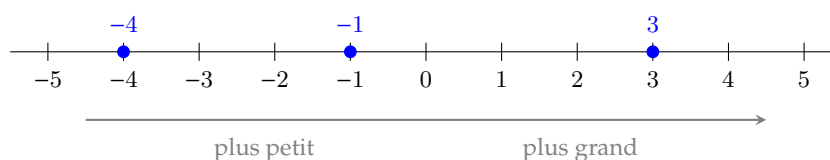
Les nombres relatifs étendent l'univers des nombres au-delà des entiers naturels. Cette extension est plus délicate qu'il n'y paraît : certaines règles familières des entiers (par exemple « plus un nombre a de chiffres, plus il est grand », ou « soustraire rend plus petit ») cessent d'être valables. Le signe « - », quant à lui, joue plusieurs rôles distincts qu'il faut apprendre à distinguer pour calculer correctement.

Cette fiche aborde les nombres relatifs sous deux angles indissociables. D'abord, le **sens du nombre** : comparer, situer sur une droite graduée, interpréter dans des contextes concrets, accepter qu'un résultat négatif puisse être la bonne réponse. Ensuite, la **maîtrise du signe moins** dans les expressions littérales : reconnaître ses différents rôles, supprimer correctement les parenthèses, réduire des sommes algébriques.

② COMPARER ET RANGER LES NOMBRES RELATIFS

Remarque 1 (Un piège de l'intuition héritée des entiers). Avec les entiers naturels, plus un nombre a de chiffres, plus il est grand : $123 > 45$. Avec les nombres négatifs, l'intuition s'inverse : $-123 < -45$. La règle est la suivante.

- Sur une droite graduée orientée de la gauche vers la droite, plus un nombre est situé à droite, plus il est grand.
- Tout nombre positif est strictement supérieur à tout nombre négatif.
- Pour deux nombres négatifs, c'est celui dont la valeur absolue est la plus petite qui est le plus grand : $-3 > -7$ parce que -3 est plus à droite que -7 .



Exercice 1 *Vrai ou faux* Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant à l'aide d'une droite graduée mentale.

- | | | |
|---------------|---------------|-------------|
| a) $-5 < -3$ | b) $-7 > -2$ | c) $0 > -1$ |
| d) $-100 < 1$ | e) $-1 < -10$ | f) $-3 > 0$ |

Exercice 2 *Ranger dans l'ordre croissant* Ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant.

- $-5; 3; -2; 0; 7; -8$
- $-1,5; -3; 0; 1; -1$
- $-12; -7; -20; -3; -15$

Exercice 3 *Trouver un nombre* Donner, dans chaque cas, un exemple de nombre relatif vérifiant la condition demandée.

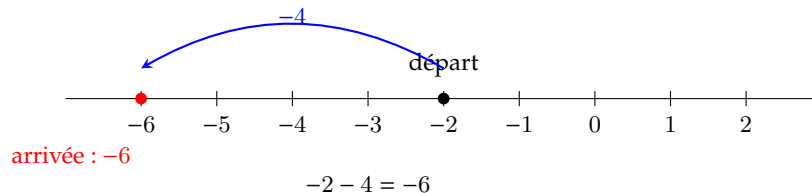
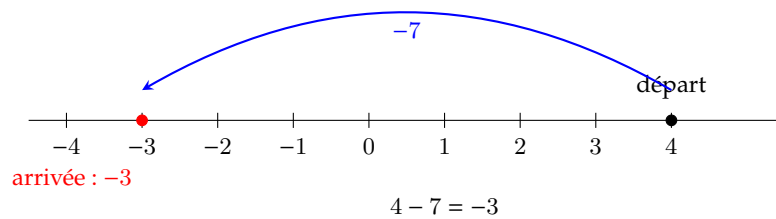
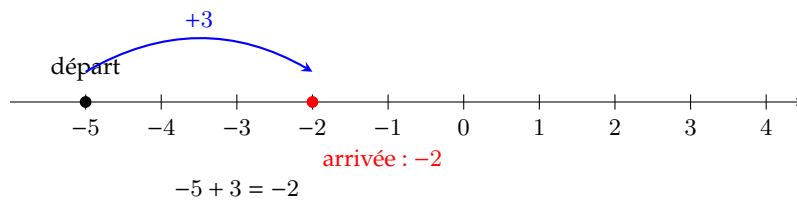
- a) Un nombre relatif strictement compris entre -5 et -3 .
- b) Trois nombres relatifs strictement inférieurs à -2 .
- c) Le plus grand nombre entier relatif strictement inférieur à 0 .
- d) Un nombre relatif compris entre $-0,5$ et 0 .

③ VISUALISER SUR LA DROITE GRADUÉE

Remarque 2 (Le signe moins comme déplacement). Sur une droite graduée orientée vers la droite :

- ajouter un nombre positif revient à se déplacer vers la **droite** ;
- soustraire un nombre positif revient à se déplacer vers la **gauche**.

Ainsi, $-5 + 3$ se lit « partir de -5 et avancer de 3 vers la droite », ce qui donne -2 . La droite graduée permet d'unifier toutes les situations : addition, soustraction, départ positif ou négatif.



Exercice 4 Lire sur la droite graduée Effectuer chacun des calculs suivants en s'appuyant sur la droite graduée. Préciser dans chaque cas le point de départ et le sens du déplacement.

- | | | |
|-------------|------------|-------------|
| a) $-3 + 5$ | b) $2 - 7$ | c) $-4 - 3$ |
| d) $-1 + 6$ | e) $5 - 9$ | f) $-2 - 5$ |

Exercice 5 Comparer deux calculs voisins Sans calculatrice, effectuer chaque calcul, puis comparer les deux résultats à l'intérieur de chaque ligne.

- a) $-5 + 3$ et $5 - 3$
- b) $-2 - 7$ et $2 - 7$
- c) $-6 + 4$ et $-4 + 6$

Que peut-on en déduire sur l'importance du signe attaché au premier terme ?

④ LES NOMBRES RELATIFS DANS LA VIE COURANTE

Remarque 3 (Donner du sens à un nombre négatif). Les nombres relatifs servent à décrire des situations où l'on doit distinguer deux directions opposées par rapport à une référence. Quelques exemples typiques sont les suivants.

- Une température au-dessus ou au-dessous de 0°C .
- Une altitude au-dessus ou au-dessous du niveau de la mer.
- Un étage situé au-dessus ou en sous-sol par rapport au rez-de-chaussée.
- Un solde bancaire positif (en avoir) ou négatif (en dette).

Dans chacun de ces contextes, le nombre 0 joue le rôle de référence, et le signe d'un nombre indique de quel côté de cette référence on se situe.

Exercice 6 *Températures*

- À Paris, il fait -3°C ce matin. Au cours de la journée, la température monte de 8°C . Quelle est la température en début d'après-midi ?
- À Moscou, la température est de -12°C en début de soirée. Pendant la nuit, elle baisse encore de 7°C . Quelle est la température minimale atteinte ?
- À midi, il fait -8°C à Reykjavik et 12°C à Marseille. Quel est l'écart de température entre les deux villes ?

Exercice 7 *Ascenseur d'immeuble* Un immeuble possède plusieurs sous-sols (numérotés $-1, -2, -3$, etc.) et plusieurs étages au-dessus du rez-de-chaussée (numérotés $1, 2, 3$, etc.). Le rez-de-chaussée est le niveau 0.

- Une personne entre dans l'ascenseur au niveau -2 et monte de 5 étages. À quel niveau arrive-t-elle ?
- Une autre personne part du 4^e étage et descend jusqu'au niveau -3 . Combien d'étages a-t-elle parcourus ?
- Une troisième personne part du niveau -1 , monte de 6 étages, puis redescend de 4 étages. À quel niveau termine-t-elle ?

Exercice 8 *Solde bancaire*

- Le solde du compte de Léa est de -45€ . Léa effectue un dépôt de 120€ . Quel est son nouveau solde ?
- Le solde du compte de Karim est de 80€ . Il effectue trois retraits successifs de 30€ , 60€ et 20€ . Quel est son solde final ? Que signifie ce résultat dans le contexte ?

Exercice 9 *Altitude*

- Le point le plus bas du lac Assal, à Djibouti, est à l'altitude -155 m (au-dessous du niveau de la mer). Le sommet du Kilimandjaro culmine à $5\,895\text{ m}$. Calculer la différence d'altitude entre ces deux points.
- Un sous-marin se trouve à l'altitude -450 m . Il remonte de 300 m . À quelle altitude est-il alors ?

⑤ RECONNAÎTRE LES RÔLES DU SIGNE MOINS

Remarque 4 (Les trois rôles du signe moins). Le signe « $-$ » peut jouer trois rôles distincts.

- **Signe d'un nombre négatif :** placé devant un nombre ou une lettre, il indique que ce nombre est négatif, comme dans -3 ou $-2x$.
- **Signe de soustraction :** placé entre deux termes, il indique une soustraction, comme dans $7 - 4$.
- **Opposé d'une expression :** placé devant une parenthèse, il indique qu'on prend l'opposé de l'expression entre parenthèses, comme dans $-(2a - 5)$.

Un même signe « $-$ » peut, selon sa position, jouer l'un ou l'autre de ces rôles. Apprendre à les reconnaître est essentiel pour mener correctement les calculs.

Remarque 5 (Lire à voix haute pour identifier le rôle). La manière dont on prononce une expression révèle la conception qu'on en a. Pour identifier le rôle d'un signe moins, on peut s'entraîner à lire l'expression à voix haute en nommant l'opération sous-jacente.

- Pour $-5 + 8$, on dit « la somme du nombre -5 et du nombre 8 » (le signe moins est le signe du nombre 5) ;
- pour $7 - 4$, on dit « la différence de 7 et 4 » (le signe moins est le signe de la soustraction) ;
- pour $-(2a + 3)$, on dit « l'opposé de l'expression $2a + 3$ » (le signe moins indique qu'on prend l'opposé).

Exercice 10 *Identifier le rôle d'un signe moins* Chaque expression ci-dessous contient un seul signe moins. Indiquer le rôle qu'il joue parmi les trois suivants : signe d'un nombre négatif, signe de soustraction, ou opposé d'une expression. Justifier la réponse en une phrase.

a) $7 - 4$

b) $-5 + 8$

c) $3x - 8$

d) $-(2a + 3)$

e) $-\frac{2}{3}$

f) $-(y + 5)$

Exercice 11 *Plusieurs signes moins dans une même expression* On considère l'expression

$$-3a - (4a - 5b) - 7.$$

Cette expression contient quatre signes moins. En les numérotant de 1 à 4 dans l'ordre où ils apparaissent (de gauche à droite), identifier le rôle de chacun.

Exercice 12 *Construire ses propres exemples* Cet exercice se fait sans calcul.

- Donner un exemple d'expression contenant un seul signe moins, qui soit le signe d'un nombre négatif.
- Donner un exemple d'expression contenant un seul signe moins, qui soit le signe d'une soustraction.
- Donner un exemple d'expression contenant un seul signe moins, qui indique l'opposé d'une expression.
- Donner un exemple d'expression dans laquelle on rencontre les trois rôles à la fois. Préciser, pour chaque signe moins, le rôle qu'il joue.

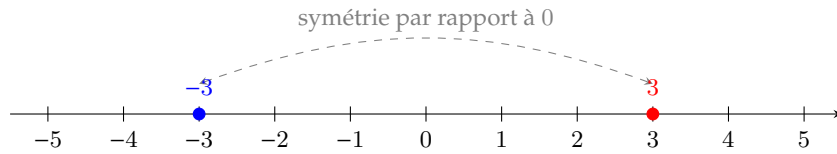
⑥ L'OPPOSÉ D'UN NOMBRE

Remarque 6 (Définir l'opposé). L'opposé d'un nombre a est le nombre, noté $-a$, tel que $a + (-a) = 0$. Sur la droite graduée, l'opposé d'un nombre est son symétrique par rapport à l'origine 0 .

- L'opposé d'un nombre positif est négatif : l'opposé de 7 est -7 .
- L'opposé d'un nombre négatif est positif : l'opposé de -3 est 3 , ce qui s'écrit $-(-3) = 3$.

- L'opposé de 0 est 0 lui-même.

Attention : la notation $-a$ ne désigne pas nécessairement un nombre négatif. Si a vaut -3 , alors $-a$ vaut 3 , qui est positif. Le signe « $-$ » de la notation $-a$ est un signe d'opposition, pas un signe de négativité.



Exercice 13 *Donner l'opposé* Donner l'opposé de chacun des nombres suivants.

- | | | |
|------------|------------------|-------------------|
| a) 7 | b) -3 | c) 0 |
| d) -12 | e) $\frac{1}{2}$ | f) $-\frac{2}{3}$ |
| g) $-(-5)$ | h) $-1,25$ | i) $4,5$ |

Exercice 14 *Vrai ou faux sur l'opposé* Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

- L'opposé d'un nombre est toujours un nombre négatif.
- L'opposé de l'opposé d'un nombre est ce nombre lui-même.
- Si a est négatif, alors $-a$ est positif.
- La notation $-a$ représente toujours un nombre négatif.
- $-(-(-5)) = 5$.

Exercice 15 *Démêler les notations* Pour chacune des notations suivantes, indiquer si elle représente un nombre positif, un nombre négatif, ou si l'on ne peut pas le savoir sans information supplémentaire.

- | | |
|----------------------------------|----------------------|
| a) -7 | b) $-(-3)$ |
| c) $-x$ avec $x > 0$ | d) $-x$ avec $x < 0$ |
| e) $-x$ sans information sur x | f) $-(-(-2))$ |

⑦ DÉMASQUER LES PARENTHÈSES FANTÔMES

Remarque 7 (L'erreur à éviter). Face à $20 + 8 - 7n - 5n$, certains élèves regroupent ainsi :

$$20 + 8 - 7n - 5n = 28 - (7n - 5n) = 28 - 2n.$$

Ce raisonnement est incorrect. Les parenthèses ajoutées n'existent pas dans l'expression de départ et leur introduction transforme $-5n$ en $+5n$, ce qui fausse le résultat.

Exercice 16 *Démâquer l'erreur* Voici quatre transformations d'expressions effectuées par des élèves. Pour chacune, dire si la transformation est correcte. Si elle est incorrecte, nommer précisément l'erreur commise et donner le calcul juste.

- $4 - 6n - 4n = 4 - (6n - 4n) = 4 - 2n$
- $4 - 6n - 4n = 4 + (-6n) + (-4n) = 4 - 10n$

$$c) 15 - 9y - 4y + 10 = 25 - 9y - 4y = 25 - 13y$$

$$d) 6 - 5a - 3 - 4a = (6 - 3) - (5a - 4a) = 3 - a$$

Exercice 17 Réduire en gardant les bons signes Réduire chacune des expressions suivantes. On veillera à conserver le signe attaché à chaque terme et à présenter une étape intermédiaire qui regroupe les termes semblables.

$$a) 4 - 6n - 4n$$

$$b) 20 + 8 - 7n - 5n$$

$$c) 15 - 9y - 4y + 10$$

$$d) 6 - 5a - 3 - 4a$$

$$e) -12 - 7x - 5 - 3x$$

$$f) 9 + 4t - 6 - 7t - 2t$$

⑧ LA RÈGLE DES SIGNES : OÙ L'UTILISER, OÙ L'ÉVITER

Remarque 8 (Une règle, un seul contexte). La règle « moins par moins donne plus » concerne uniquement la **multiplication** (et la division). Elle ne s'applique **jamais** à l'addition ou à la soustraction. La confusion entre ces deux contextes est l'une des erreurs les plus persistantes en algèbre élémentaire.

Exercice 18 Multiplication ou addition ? Pour chacun des calculs suivants, indiquer s'il s'agit d'une addition ou d'une multiplication, puis donner le résultat.

$$a) -6 \times (-4)$$

$$b) -6 - 4$$

$$c) -3 + (-5)$$

$$d) -3 \times (-5)$$

$$e) -7 - (-2)$$

$$f) -7 \times (-2)$$

Exercice 19 Pourquoi cette règle ne s'applique-t-elle pas ici ? Voici trois calculs effectués par un élève. Pour chacun, indiquer si le calcul est correct. Si ce n'est pas le cas, expliquer pourquoi la règle invoquée ne s'applique pas dans ce contexte, puis donner le résultat juste.

$$a) -9y - 4y = +13y \quad (\text{« moins par moins donne plus »})$$

$$b) -9 \times (-4) = +36 \quad (\text{« moins par moins donne plus »})$$

$$c) -6 - 5 = +11 \quad (\text{« moins par moins donne plus »})$$

Exercice 20 Fluence sur la règle des signes Effectuer mentalement les multiplications et divisions suivantes.

$$a) (-3) \times 4$$

$$b) 5 \times (-7)$$

$$c) (-6) \times (-2)$$

$$d) (-8) \times (-3)$$

$$e) (-9) \times 0$$

$$f) \frac{-20}{4}$$

$$g) \frac{-15}{-3}$$

$$h) \frac{12}{-6}$$

⑨ LE SIGNE SE RATTACHE AU TERME QUI SUIT

Remarque 9 (Lecture orientée d'une expression littérale). Dans une expression littérale, chaque terme est précédé de son propre signe. Le signe « - » qui apparaît entre deux termes appartient au terme qui le **suit**, jamais à celui qui le précède.

Dans $6y - 20 + 3y - 12$, les quatre termes sont : $+6y$; -20 ; $+3y$; -12 . Le signe « - » devant 20 ne porte aucune information sur $6y$; il indique seulement que le terme suivant est -20 .

Exercice 21 Lister les termes signés Pour chacune des expressions littérales suivantes, lister les termes accompagnés de leur signe. On rappelle que le signe « + » d'un terme initial est sous-entendu mais bien présent.

- a) $6y - 20 + 3y - 12$ b) $-5x + 7 - 2x - 3$ c) $-a - b + c - d$ d) $4 - 6n - 4n$

Exercice 22 *Le zéro implicite* Un signe moins en tête d'expression peut toujours être interprété comme une soustraction à partir d'un zéro sous-entendu. Ainsi, $-5 + 8$ se réécrit $0 - 5 + 8$: cette transformation rend visible la soustraction sous-jacente entre 0 et 5, et confirme que le terme initial est bien -5 .

Pour chacune des expressions suivantes, ajouter un 0 en tête, puis donner la liste des termes signés.

- a) $-7 + 3$ b) $-2x + 5y$ c) $-a - b + 4$ d) $-3 - 5 + 9$

Exercice 23 *Lire dans le bon sens* On considère l'expression $7 - 13$. Un élève écrit :

$$7 - 13 = 13 - 7 = 6.$$

- a) Cette transformation est-elle correcte ? Expliquer pourquoi en s'appuyant sur le rôle du signe moins.
 b) Donner la valeur exacte de $7 - 13$.
 c) Le même élève écrit : $2x - 7 - 6x - 4 = 4x - 11$. Identifier précisément l'erreur, puis donner le résultat correct en présentant la liste des termes signés.

10 LE SIGNE MOINS COMME OPPOSÉ D'UNE EXPRESSION

Remarque 10 (Prendre l'opposé d'une expression entre parenthèses). Lorsqu'un signe moins précède une parenthèse, comme dans $-(2a - 5b + 3c)$, il joue le rôle d'opposé. Pour supprimer les parenthèses, on change le signe de chaque terme contenu dans la parenthèse :

$$-(2a - 5b + 3c) = -2a + 5b - 3c.$$

Exercice 24 *Supprimer les parenthèses précédées d'un signe moins* Supprimer les parenthèses dans chacune des expressions suivantes, en prenant garde au rôle de chaque signe moins.

- a) $-(3x + 5)$ b) $-(4a - 7)$ c) $-(2y - 3z + 1)$
 d) $-(-a + b - c)$ e) $7 - (x - 4)$ f) $2a - (4a - 5b + 2c)$

11 SYNTHÈSE : RÉDUCTIONS GUIDÉES

Remarque 11 (Le double visage du signe moins). Dans une expression comme $-4 - 3$, le deuxième signe moins joue en réalité deux rôles à la fois.

- Il est le **signe d'une soustraction** : il sépare les deux termes -4 et 3 .
- Il est aussi le **signe d'un nombre négatif** : réduire $-4 - 3$ revient à additionner les termes signés -4 et -3 , donc à faire de 3 un terme négatif.

Autrement dit, $-4 - 3 = (-4) + (-3) = -7$. Reconnaître ce double rôle marque le passage à un usage maîtrisé du signe moins : on ne traite plus « moins » comme une instruction de soustraction, mais comme le signe d'un terme dans une addition.

Exercice 25 *Réécrire en additions de termes signés* Pour chacune des expressions suivantes, réécrire le calcul sous forme d'addition de termes signés (avec parenthèses), puis donner le résultat. On suivra le modèle : $-4 - 3 = (-4) + (-3) = -7$.

a) $-7 - 2$

b) $5 - 9$

c) $-3 + 8$

d) $-6 - 4$

e) $10 - 15$

f) $-2 - 8$

Exercice 26 *Réductions progressives* Réduire chacune des expressions littérales suivantes. On rédigera en suivant le modèle :

1. Réécrire chaque terme avec son signe.
2. Regrouper les termes semblables sans modifier les signes.
3. Effectuer les additions de termes semblables.

a) $4n - 3n$

b) $-5x + 2x - 7x$

c) $4 - 6n - 4n + 9$

d) $-15 - 9y - 4y + 10$

e) $6y - 20 + 3y - 12 + y$

f) $-3a - 4 + 5a - 7 - 2a + 1$

Exercice 27 *Pour aller plus loin* Réduire chacune des expressions suivantes après avoir supprimé les parenthèses. On précisera, pour chaque signe moins de l'expression initiale, s'il est le signe d'un nombre négatif, le signe d'une soustraction, ou s'il indique l'opposé d'une expression entre parenthèses.

a) $5x - (3x - 7) + 2$

b) $-(2a + 5) - (3a - 4)$

c) $4y - (y - 3) - (2y + 5)$

d) $-(-3n + 7) + (5n - 2) - (n + 4)$

12 ACCEPTER LES RÉSULTATS NÉGATIFS

Remarque 12 (Un résultat négatif est aussi une réponse). Dans un problème, un résultat négatif n'est pas une erreur : il est une information à interpréter. Un solde de -30 € signifie une dette de 30 €. Une température de -5 °C signifie cinq degrés sous zéro. Une altitude de -150 m signifie une profondeur de 150 m sous le niveau de la mer. La valeur -7 peut parfaitement être la solution d'une équation. Refuser un nombre négatif comme conclusion, c'est se priver d'une partie du sens du problème.

Exercice 28 *Calculer puis interpréter* Pour chaque problème, effectuer le calcul puis interpréter le résultat dans le contexte donné.

- a) Marc avait 25 € sur son compte. Il dépense 40 € avec sa carte bancaire. Quel est son nouveau solde ? Que signifie ce résultat ?
- b) En montagne, la température était de -2 °C ce matin. Elle a baissé de 5 °C dans la journée. Quelle est la température en fin de journée ? Que signifie ce résultat ?
- c) Une plongeuse se trouve à l'altitude -12 m. Elle descend encore de 8 m. Quelle est sa nouvelle altitude ? Que signifie ce résultat ?
- d) Trouver le nombre x tel que $x + 12 = 5$. Le résultat est-il positif ou négatif ? Pouvait-on le prévoir avant de calculer ?

Exercice 29 *Soustraire ne rend pas toujours plus petit*

- a) Effectuer chacun des calculs suivants : $5 - 3$; $5 - (-3)$; $-5 - 3$; $-5 - (-3)$.
- b) Dans lesquels de ces calculs le résultat est-il *plus grand* que le premier nombre ? Comment l'expliquer ?

13 POUR S'AUTO-ÉVALUER

Remarque 13 (Cinq questions à se poser). Avant de simplifier une expression ou d'interpréter un résultat, prendre l'habitude de se poser ces cinq questions.

- Quels sont les termes de l'expression et quel signe est attaché à chacun ?
- Y a-t-il des parenthèses précédées d'un signe moins (opposé d'une expression) à supprimer ?
- Suis-je en train d'introduire une parenthèse qui n'existe pas dans l'expression initiale ?
- Suis-je en train d'appliquer la règle des signes à une addition au lieu d'une multiplication ?
- Suis-je en train de transposer une intuition héritée des entiers naturels (« plus de chiffres = plus grand », « soustraire rend plus petit ») à des nombres relatifs où elle ne tient plus ?