Maîtriser le théorème de Pythagore

Une fiche d'exercices pour comprendre le sens géométrique, identifier l'hypoténuse, distinguer direct et réciproque

1 Pourquoi cette fiche ?

Le théorème de Pythagore est probablement le résultat le plus connu de la géométrie. Mais sa célèbre formule $a^2 + b^2 = c^2$ cache une réalité géométrique souvent oubliée : il s'agit d'une relation entre les **aires de carrés** construits sur les côtés du triangle rectangle. Réduire le théorème à une formule à appliquer mécaniquement, c'est se priver du sens qui permet de l'utiliser correctement.

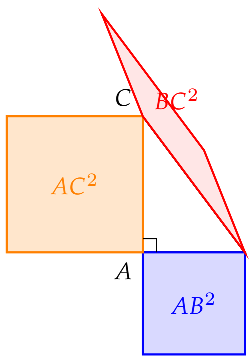
Cette fiche aborde le théorème en suivant cinq axes. D'abord, retrouver le sens géométrique des sommes de carrés. Ensuite, apprendre à identifier l'hypoténuse quel que soit l'orientation du triangle. Puis, distinguer rigoureusement le théorème direct (calculer une longueur) de la réciproque (démontrer qu'un triangle est rectangle) et de la contraposée (démontrer qu'il ne l'est pas). Enfin, déjouer le piège des triplets pythagoriciens mal mémorisés.

2 Le théorème : une relation entre aires

Remarque 1 (Sommes de carrés et triangle rectangle). Soit un triangle ABC rectangle en A. Alors :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Le côté $[BC]$, opposé à l'angle droit, est appelé l'**hypoténuse** ; c'est le plus long côté du triangle. Les côtés $[AB]$ et $[AC]$, qui forment l'angle droit, sont les **côtés de l'angle droit** (parfois appelés *cathètes*).
Sens géométrique. Les écritures BC^2, AB^2 et AC^2 désignent les **aires des carrés** construits sur les côtés correspondants. Le théorème affirme que l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit.



Exercice 1 *Vérifier le théorème par les aires* On considère un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 3 cm et 4 cm.

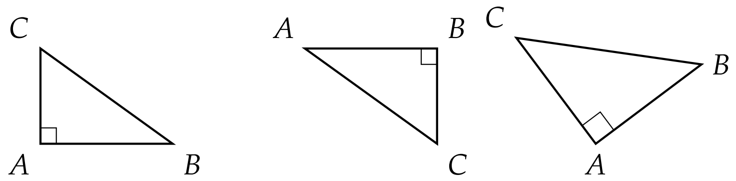
a) Calculer l'aire du carré construit sur le côté de longueur 3 cm.
b) Calculer l'aire du carré construit sur le côté de longueur 4 cm.
c) Calculer la somme des deux aires précédentes.
d) En déduire l'aire du carré construit sur l'hypoténuse, puis la longueur de l'hypoténuse.

3 Identifier l'hypoténuse

Remarque 2 (L'hypoténuse, indépendamment de l'orientation). L'hypoténuse n'est pas « le côté du bas » ni « le plus long côté écrit en premier ». C'est le côté **opposé à l'angle droit**, et c'est toujours le plus long des trois côtés.
Pour la repérer, on cherche d'abord l'angle droit (généralement signalé par un petit carré sur le sommet correspondant). Le côté qui ne touche pas cet angle est l'hypoténuse.
L'erreur classique consiste à figer mentalement l'orientation du triangle (hypoténuse en bas, côtés verticaux et horizontaux). Dans une figure réelle, le triangle peut être orienté de mille manières : il faut savoir reconnaître la configuration sans s'appuyer sur une position particulière.

Exercice 2 *Repérer l'hypoténuse* Pour chacun des triangles décrits ci-dessous, indiquer quel sommet porte l'angle droit (s'il y en a un) et quel côté est l'hypoténuse.

a) Un triangle RST rectangle en S.
b) Un triangle XYZ tel que les côtés $[XY]$ et $[YZ]$ sont perpendiculaires.
c) Un triangle MNP rectangle en P.
d) Un triangle DEF tel que l'angle $\widehat{EDF}$ est droit.



Exercice 3 *Lecture sur figure* Pour chaque triangle représenté ci-dessus, identifier l'angle droit et nommer l'hypoténuse.

4 Calculer une longueur (théorème direct)

Remarque 3 (Calculer l'hypoténuse, calculer un côté de l'angle droit). Le théorème direct, $BC^2 = AB^2 + AC^2$, sert à calculer une longueur quand on connaît les deux autres. Selon la longueur cherchée, le calcul prend deux formes.
Calculer l'hypoténuse. On élève les côtés au carré, on additionne, puis on extrait la racine carrée pour obtenir la longueur (et non son carré).

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad \Longrightarrow \quad BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}.$$

Calculer un côté de l'angle droit. On isole le carré recherché par soustraction, puis on extrait la racine.

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 \quad \Longrightarrow \quad AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}.$$

Erreur fréquente. S'arrêter à l'égalité au carré sans extraire la racine. Le théorème donne $BC^2 = 25$, ce qui ne signifie pas $BC = 25$, mais $BC = 5$.

Exercice 4 *Calculer l'hypoténuse* Calculer la longueur de l'hypoténuse de chaque triangle rectangle, sachant que les côtés de l'angle droit mesurent :

a) 6 cm et 8 cm

b) 5 cm et 12 cm
c) 9 cm et 12 cm
d) 7 cm et 24 cm

Exercice 5 *Calculer un côté de l'angle droit* Calculer la longueur du côté manquant dans chaque triangle rectangle.

a) Hypoténuse 13 cm, un côté de l'angle droit 5 cm.
b) Hypoténuse 25 cm, un côté de l'angle droit 7 cm.
c) Hypoténuse 17 cm, un côté de l'angle droit 8 cm.
d) Hypoténuse 10 cm, un côté de l'angle droit 6 cm.

Exercice 6 *Démasquer l'erreur* Voici la production d'un élève qui doit calculer l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 5 cm et 7 cm.

« $h^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$, donc $h = 74$ cm. »

a) Identifier l'erreur de l'élève.
b) Donner le résultat correct, en valeur exacte puis en valeur approchée au dixième près.

5 Démontrer qu'un triangle est rectangle (réciproque)

Remarque 4 (La réciproque, et son cousin la contraposée). Le théorème direct part d'un triangle rectangle pour en déduire une égalité sur les longueurs. La **réciproque** fait l'inverse : elle part d'une égalité sur les longueurs pour en déduire que le triangle est rectangle.
Réciproque du théorème de Pythagore. Si dans un triangle, le carré du plus long côté est égal à la somme des carrés des deux autres, alors le triangle est rectangle, et son hypoténuse est le plus long côté.
Contraposée. Si l'égalité ne tient pas, alors le triangle n'est pas rectangle. C'est l'outil pour démontrer qu'un triangle n'est *pas* rectangle.
Rédaction-type. On écrit toujours : « On calcule séparément $AB^2 + AC^2$ d'une part, et BC^2 d'autre part. On compare. Si l'égalité tient, on conclut par la réciproque ; sinon, par la contraposée. »

Exercice 7 *Rectangle ou pas ?* Pour chaque triangle, déterminer s'il est rectangle. Si oui, préciser en quel sommet. Sinon, justifier par la contraposée.

a) ABC avec $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 10$ cm.
b) DEF avec $DE = 5$ cm, $DF = 7$ cm, $EF = 9$ cm.
c) RST avec $RS = 9$ cm, $RT = 12$ cm, $ST = 15$ cm.
d) MNP avec $MN = 8$ cm, $MP = 6$ cm, $NP = 11$ cm.

Exercice 8 *Démasquer la confusion direct/réciproque* Voici deux productions d'élèves. Pour chacune, dire si elle est correcte. Sinon, identifier l'erreur de logique.

a) « Le triangle ABC est tel que $AB = 5$, $AC = 12$, $BC = 13$. Comme c'est un triangle rectangle, le théorème de Pythagore s'applique, donc $5^2 + 12^2 = 13^2$, ce qui est vrai. »
b) « Le triangle DEF est tel que $DE = 3$, $DF = 4$, $EF = 5$. Le théorème de Pythagore donne $EF = \sqrt{DE^2 + DF^2} = 5$. Donc DEF est rectangle en D. »

6 Triplets pythagoriciens : se méfier des apparences

Remarque 5 (Mémoriser sans paresser). Les triplets pythagoriciens sont des triplets d'entiers $(a\,;\,b\,;\,c)$ tels que $a^2 + b^2 = c^2$. Les plus courants à connaître sont :

$$(3\,;4\,;5) \quad ; \quad (5\,;12\,;13) \quad ; \quad (8\,;15\,;17) \quad ; \quad (7\,;24\,;25).$$

On retrouve aussi leurs multiples : $(6\,;\,8\,;\,10) = 2 \times (3\,;\,4\,;\,5)$, $(9\,;\,12\,;\,15) = 3 \times (3\,;\,4\,;\,5)$, etc.
Piège. L'élève qui « reconnaît » un triplet à partir des deux premiers nombres et conclut sans vérifier l'égalité commet une erreur grave. Un triangle de côtés $(3\,;\,4\,;\,6)$ n'est *pas* rectangle, malgré sa ressemblance avec le triplet $(3\,;\,4\,;\,5)$: $3^2 + 4^2 = 25 \neq 6^2 = 36$.
La vérification systématique de l'égalité est la seule garantie.

Exercice 9 *Vrai triplet ou faux ami ?* Pour chaque triplet, dire s'il est pythagoricien. Si oui, donner le côté qui joue le rôle d'hypoténuse. Sinon, démontrer par le calcul.

a) $(3\,;4\,;6)$
b) $(5\,;12\,;14)$
c) $(6\,;8\,;10)$
d) $(8\,;15\,;17)$
e) $(9\,;40\,;41)$
f) $(7\,;24\,;26)$

7 Pour s'auto-évaluer

Remarque 6 (Cinq questions à se poser). Avant et pendant l'usage du théorème de Pythagore, prendre l'habitude de se poser ces cinq questions.

- Ai-je correctement identifié l'hypoténuse, en repérant l'angle droit indépendamment de l'orientation du triangle ?
- Suis-je en train de calculer une longueur (théorème direct, à partir d'un triangle rectangle), ou de démontrer qu'un triangle est ou n'est pas rectangle (réciproque ou contraposée) ?
- Quand j'arrive à $h^2 = \ldots$, ai-je bien extrait la racine carrée pour obtenir h ?
- Quand je vérifie un triplet, ai-je calculé séparément les deux membres, sans me fier à la ressemblance avec un triplet connu ?
- Ma conclusion mentionne-t-elle clairement le théorème invoqué (direct, réciproque ou contraposée) ?