Maîtriser les puissances

Une fiche d'exercices pour comprendre l'écriture exponentielle, les règles de calcul et les pièges classiques

1 Pourquoi cette fiche ?

L'écriture a^n est une notation **condensée** pour un produit. Elle ne désigne ni une multiplication entre a et n, ni leur somme : c'est la multiplication de a par lui-même n fois. Cette définition simple cache plusieurs pièges. Le sens des parenthèses devient crucial ($(-2)^2$ et -2^2 ne sont pas le même nombre), les règles de calcul ne sont pas commutatives entre l'addition et la mise au carré ($(a+b)^2 \neq a^2+b^2$), et certaines conventions ($a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$) demandent à être justifiées plutôt qu'apprises par c(oe)ur.

Cette fiche propose une progression en cinq temps : revenir au sens de la notation par dépliage, examiner le rôle des parenthèses, manipuler les règles de calcul, démasquer les généralisations abusives, et justifier les conventions par la régularité des suites de puissances.

2 Définir une puissance par dépliage

Remarque 1 (Une notation condensée pour un produit répété). Pour tout nombre a et tout entier n strictement positif, la **puissance n-ième** de a est définie par :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}.$$

Le nombre a est appelé la **base**, et le nombre n l'**exposant**. Ainsi :

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8 \quad ; \quad 5^2 = 5 \times 5 = 25 \quad ; \quad 10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000.$$

Erreur fréquente. L'élève qui lit 2^3 comme $2 \times 3 = 6$ confond la puissance avec la multiplication. La notation est compacte : il faut toujours penser à la **déplier** pour retrouver le sens.

Exercice 1 *Calculer en dépliant* Pour chaque puissance, écrire d'abord le produit répété, puis donner le résultat.

a) 2^4 b) 3^3 c) 5^3
d) 10^5 e) 1^{100} f) 7^2
g) 4^3 h) 0^5 i) 2^7

Exercice 2 *Démasquer la confusion puissance/multiplication* Voici quatre productions d'élèves. Pour chacune, dire si elle est correcte. Sinon, identifier l'erreur et donner le résultat juste.

a) $2^3 = 6$
b) $5^2 = 10$
c) $4^2 = 16$
d) $3^4 = 12$

③ Le rôle des parenthèses : $(-2)^2$ et -2^2 ne sont pas le même nombre

Remarque 2 (Une parenthèse change tout). La présence ou l'absence de parenthèses autour d'un nombre négatif modifie radicalement la valeur d'une puissance.

- Dans $(-2)^2$, le signe moins est inclus dans la base. On élève -2 au carré : $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$.
- Dans -2^2, par convention sur la priorité des opérations, la puissance est évaluée **avant** le signe moins. On calcule d'abord $2^2 = 4$, puis on prend l'opposé : $-2^2 = -4$.

Plus généralement, $(-a)^n$ et $-a^n$ ne sont en général pas égaux. La parenthèse marque le périmètre de l'élévation à la puissance.

Exercice 3 *Avec ou sans parenthèses* Calculer chacune des expressions suivantes. Mettre en évidence l'effet des parenthèses.

a) $(-3)^2$ b) -3^2 c) $(-3)^3$
d) -3^3 e) $(-1)^{10}$ f) -1^{10}
g) $(-5)^2$ h) -5^2 i) $(-2)^4$

Exercice 4 *Pair ou impair ?* Sans calculer, indiquer pour chaque expression si le résultat est positif ou négatif. Justifier en fonction de la parité de l'exposant.

a) $(-7)^4$ b) $(-7)^5$ c) $(-2)^{10}$
d) $(-2)^{11}$ e) $(-1)^{2026}$ f) $(-1)^{2027}$

④ Règles de calcul sur les puissances

Remarque 3 (Trois règles fondamentales). Pour deux entiers m et n, et un nombre a non nul, on a :

- **Produit de deux puissances de même base :** $a^m \times a^n = a^{m+n}$.
- **Quotient de deux puissances de même base :** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
- **Puissance d'une puissance :** $(a^m)^n = a^{m\times n}$.

Ces règles se justifient toutes par le dépliage. Par exemple :

$$a^3 \times a^2 = (a \times a \times a) \times (a \times a) = a^5 = a^{3+2}.$$

Tant qu'on doute, on peut revenir au dépliage pour reconstruire la règle.

Exercice 5 *Simplifier en utilisant les règles* Écrire chacune des expressions suivantes sous la forme d'une seule puissance.

a) $2^3 \times 2^4$ b) $5^7 \times 5^2$ c) $\dfrac{10^8}{10^3}$
d) $\dfrac{7^{10}}{7^4}$ e) $\left(3^2\right)^4$ f) $\left(2^5\right)^3$
g) $a^4 \times a^7$ h) $\dfrac{x^{12}}{x^5}$ i) $\left(b^3\right)^6$

Exercice 6 *Démasquer les confusions de règles* Voici cinq productions d'élèves. Pour chacune, dire si elle est correcte. Sinon, identifier l'erreur (en nommant la règle invoquée à tort) et donner le résultat juste.

a) $2^3 \times 2^5 = 2^{15}$

b) $\dfrac{a^7}{a^2} = a^5$

c) $\left(x^3\right)^4 = x^7$

d) $a^3 + a^4 = a^7$

e) $3^2 \times 4^2 = 12^2$

⑤ Puissances et somme : le piège de la distributivité

Remarque 4 (La puissance n'est pas distributive sur l'addition). La règle de distributivité $k(a+b) = ka + kb$ tient parce que la multiplication par k s'effectue terme à terme. La puissance, en revanche, **n'est pas distributive** sur l'addition :

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2 \text{ en général.}$$

Le développement correct de $(a+b)^2$ s'obtient par double distributivité :

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Le terme $2ab$, appelé **double produit**, est précisément ce que l'élève oublie quand il écrit $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. C'est l'une des erreurs les plus persistantes en algèbre.

Exercice 7 *Tester l'erreur sur des nombres*

a) Calculer $(3+4)^2$ en utilisant l'ordre des opérations (somme d'abord, puis carré).

b) Calculer $3^2 + 4^2$.

c) Comparer les deux résultats. L'égalité $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ est-elle vraie pour $a = 3$ et $b = 4$?

d) Calculer $(3+4)^2$ en développant l'expression $a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 3$ et $b = 4$. Vérifier que ce développement est correct.

Exercice 8 *Développer un carré* Développer chacune des expressions suivantes en utilisant la double distributivité.

a) $(x+5)^2$

b) $(a-3)^2$

c) $(2y+1)^2$

d) $(3-x)^2$

⑥ Justifier les conventions : $a^0 = 1$ et a^{-n}

Remarque 5 (Une convention rendue nécessaire par la régularité). La définition d'une puissance par dépliage ne dit rien des cas a^0 et a^{-n}. Pourquoi pose-t-on $a^0 = 1$, et pas $a^0 = 0$?
L'argument est celui de la **régularité de la suite des puissances**. En partant de $2^4 = 16$ et en divisant par 2 à chaque étape, on obtient :

$$2^4 = 16 \quad ; \quad 2^3 = 8 \quad ; \quad 2^2 = 4 \quad ; \quad 2^1 = 2 \quad ; \quad 2^0 = ? \quad ; \quad 2^{-1} = ?$$

Pour préserver la règle (passer de 2^n à 2^{n-1} en divisant par 2), il faut nécessairement :

$$2^0 = 1 \quad ; \quad 2^{-1} = \frac{1}{2} \quad ; \quad 2^{-2} = \frac{1}{4} \quad ; \quad 2^{-3} = \frac{1}{8}.$$

Conventions générales (pour a non nul).

- $a^0 = 1$.
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, en particulier $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

Erreur fréquente. L'écriture a^{-1} ne signifie pas « l'opposé de a ». Elle signifie « l'inverse de a ». Ainsi, $5^{-1} = \dfrac{1}{5}$, et non -5.

Exercice 9 *Calculer des puissances négatives ou nulles* Calculer chacune des puissances suivantes.

a) 7^0

b) $(-3)^0$

c) 5^{-1}

d) 2^{-3}

e) 10^{-2}

f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$

g) 4^{-2}

h) $(-2)^{-3}$

i) 1^{-100}

Exercice 10 *Démasquer la confusion exposant négatif/opposé* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

a) $5^{-1} = -5$.

b) $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ pour tout a non nul.

c) $2^{-3} = -8$.

d) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1} = \dfrac{4}{3}$.

7 Pour s'auto-évaluer

Remarque 6 (Cinq questions à se poser). Avant de manipuler une puissance, prendre l'habitude de se poser ces cinq questions.

- Suis-je en train de calculer a^n comme un produit répété, ou de le confondre avec $a \times n$?
- Y a-t-il une parenthèse autour du nombre négatif ? L'absence de parenthèse change la valeur ($-2^2 \neq (-2)^2$).
- Pour combiner deux puissances, ai-je bien identifié l'opération (produit, quotient, puissance de puissance) et appliqué la règle correspondante ?
- Suis-je en train de distribuer la puissance sur une somme, ce qui est interdit ($(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$) ?
- L'exposant -1 que j'utilise désigne-t-il bien l'**inverse**, et non l'opposé ?