Maîtriser la proportionnalité

Une fiche d'exercices pour reconnaître la proportionnalité, varier les procédures et déjouer l'illusion de linéarité

1 Pourquoi cette fiche ?

La proportionnalité est l'un des outils les plus utiles, et l'un des plus mal compris. Deux grandeurs sont proportionnelles quand l'une est égale à l'autre multipliée par un coefficient constant : si l'on double l'une, on double l'autre ; si on triple l'une, on triple l'autre. Cette idée simple cache deux pièges symétriques. Le premier est l'**illusion de linéarité** : l'élève applique un raisonnement additif (« +3 partout ») au lieu d'un coefficient multiplicatif. Le second est l'**application aveugle** : tout problème à deux grandeurs est traité comme proportionnel, même quand la situation ne l'est pas.

Cette fiche aborde la proportionnalité en variant systématiquement les procédures (retour à l'unité, coefficient, propriété additive, propriété multiplicative, produit en croix) plutôt qu'en imposant le seul produit en croix. Elle propose aussi des situations qui ne sont **pas** proportionnelles, pour apprendre à les reconnaître et à ne pas y appliquer les outils de la proportionnalité.

2 Reconnaître une situation de proportionnalité

Remarque 1 (Le test du coefficient). Deux grandeurs x et y sont proportionnelles s'il existe un nombre k (le **coefficient de proportionnalité**) tel que $y = k \times x$ pour toutes les valeurs prises.
Pour le tester sur un tableau de valeurs, on calcule le rapport $\dfrac{y}{x}$ pour chaque colonne. Si ce rapport est constant, les grandeurs sont proportionnelles. S'il varie, elles ne le sont pas.
Critère pratique : dans une situation proportionnelle, multiplier x par 2 multiplie y par 2, multiplier x par 3 multiplie y par 3, etc. Si l'on double la quantité achetée, on double le prix : c'est de la proportionnalité. Si l'on double l'âge d'une personne, sa taille ne double pas : ce n'est pas de la proportionnalité.

Exercice 1 *Proportionnel ou non ?* Pour chaque situation, dire si les deux grandeurs sont proportionnelles. Justifier brièvement.

a) Le prix payé chez le boulanger pour un nombre de baguettes (toutes au même prix unitaire).
b) L'âge d'une personne et sa taille.
c) Le périmètre d'un carré et la longueur de son côté.
d) L'aire d'un carré et la longueur de son côté.
e) La distance parcourue par une voiture roulant à vitesse constante, en fonction du temps.
f) Le prix d'un abonnement de salle de sport composé d'un droit d'entrée fixe de 30 € plus 10 € par mois, en fonction du nombre de mois.

Exercice 2 *Tester sur un tableau* Pour chaque tableau, dire si les deux grandeurs sont proportionnelles. Si oui, donner le coefficient de proportionnalité.

Tableau A	2	5	7	10
	6	15	21	30

Tableau B	1	2	3	4
	5	8	11	14

③ Plusieurs procédures pour résoudre

Remarque 2 (Quatre procédures, à choisir selon la situation). Plutôt que de toujours utiliser le produit en croix, il est utile de connaître plusieurs procédures et de choisir la plus efficace selon les nombres en jeu.
1. Retour à l'unité. On cherche d'abord la valeur correspondant à 1, puis on multiplie par la quantité voulue. Efficace quand la division par la première donnée est simple.
2. Coefficient de proportionnalité. On calcule le coefficient $k = \frac{y}{x}$, puis on l'applique à toute valeur de x. Efficace quand on doit calculer plusieurs valeurs.
3. Propriété multiplicative. Si l'on connaît y pour une valeur de x, alors y pour kx est ky. Efficace quand les valeurs sont multiples l'une de l'autre.
4. Propriété additive. Si l'on connaît y_1 pour x_1 et y_2 pour x_2, alors $y_1 + y_2$ correspond à $x_1 + x_2$. Efficace pour combiner des valeurs connues.
5. Produit en croix. À utiliser en dernier recours quand les autres procédures n'aident pas. Il consiste à écrire $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$, puis à isoler l'inconnue par $y_2 = \frac{y_1 \times x_2}{x_1}$.

Exercice 3 *Choisir une procédure efficace* Pour chaque problème, choisir la procédure la plus rapide et donner la réponse.

a) 4 kg de pommes coûtent 8 €. Combien coûtent 7 kg ?
b) 12 stylos coûtent 18 €. Combien coûtent 4 stylos ?
c) 5 croissants coûtent 5,50 € et 3 pains au chocolat coûtent 3,30 €. Combien coûte un goûter composé de 2 croissants et 1 pain au chocolat ?
d) 7 litres d'essence coûtent 12,60 €. Quel est le prix de 1 litre ? Combien coûtent 50 litres ?

Exercice 4 *Le produit en croix* Calculer chaque inconnue par produit en croix.

a) Si 9 correspond à 15, à quoi correspond 6 ?
b) Si 12 correspond à 20, à quoi correspond 30 ?
c) Si 4 correspond à 13, à quoi correspond 11 ?

④ Démasquer l'illusion de linéarité

Remarque 3 (Le piège du raisonnement additif). L'erreur la plus fréquente en proportionnalité consiste à appliquer un raisonnement **additif** là où il faut un raisonnement **multiplicatif**. Devant un problème d'agrandissement, par exemple, l'élève qui sait que « quand le côté augmente de 2 cm, le périmètre augmente de … » applique souvent un « $+k$ » partout au lieu d'un « $\times k$ ».
Ce piège est particulièrement vicieux pour les aires et les volumes. Si l'on double les longueurs d'une figure, l'aire est multipliée par 4 (pas par 2), et le volume est multiplié par 8 (pas par 2). L'élève qui multiplie l'aire par 2 commet l'erreur d'illusion de linéarité.

Exercice 5 *Démasquer l'erreur* Voici trois productions d'élèves. Pour chacune, dire si elle est correcte. Sinon, identifier l'erreur et donner le résultat juste.

a) « Un carré de côté 3 cm a pour aire 9 cm^2. Donc un carré de côté 6 cm a pour aire 18 cm^2. »
b) « Si une recette pour 4 personnes utilise 200 g de farine, alors pour 6 personnes il faut $200 + 2 \times 50 = 300$ g. »
c) « Une voiture parcourt 80 km en 1 h. Donc en 3 h elle parcourt 240 km. »

Exercice 6 *Aires et volumes*

a) Un carré a pour côté 5 cm. Calculer son aire.
b) On agrandit le carré en multipliant le côté par 3. Calculer la nouvelle aire. Par quel coefficient l'aire a-t-elle été multipliée ?
c) Un cube a pour arête 2 cm. Calculer son volume.
d) On agrandit le cube en multipliant l'arête par 2. Calculer le nouveau volume. Par quel coefficient le volume a-t-il été multiplié ?

5 Pourcentages et échelles

Remarque 4 (Deux applications classiques de la proportionnalité). **Pourcentages.** Calculer $p\,\%$ d'une quantité Q revient à multiplier Q par $\frac{p}{100}$. Augmenter de $p\,\%$, c'est multiplier par $\left(1+\frac{p}{100}\right)$. Diminuer de $p\,\%$, c'est multiplier par $\left(1-\frac{p}{100}\right)$.
Échelles. L'échelle d'un plan ou d'une carte est le rapport entre les longueurs sur le plan et les longueurs réelles. Une échelle de $\frac{1}{50\,000}$ signifie que 1 cm sur le plan correspond à $50\,000$ cm $= 500$ m dans la réalité.

Exercice 7 *Pourcentages*

a) Calculer $20\,\%$ de 80.
b) Un article coûtait 40 € et est augmenté de $15\,\%$. Quel est le nouveau prix ?
c) Un article coûtait 50 € et est soldé à $-30\,\%$. Quel est le prix après remise ?
d) Une population passe de $1\,200$ à $1\,500$ habitants. Quel est le pourcentage d'évolution ?

Exercice 8 *Échelles*

a) Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{25\,000}$, deux villages sont distants de 8 cm. Quelle est la distance réelle entre eux, en km ?
b) Sur le plan d'un appartement à l'échelle $\frac{1}{100}$, le salon est représenté par un rectangle de 5 cm sur 4 cm. Quelle est l'aire réelle du salon ?

6 Pour s'auto-évaluer

Remarque 5 (Cinq questions à se poser). Avant et pendant un calcul de proportionnalité, prendre l'habitude de se poser ces cinq questions.

- La situation est-elle bien proportionnelle ? Si je double l'une des grandeurs, l'autre est-elle aussi doublée ?
- Quelle est la procédure la plus rapide : retour à l'unité, coefficient, propriété multiplicative, propriété additive, ou produit en croix ?
- Suis-je en train de raisonner additivement (« $+k$ partout ») là où il faudrait raisonner multiplicativement (« $\times k$ partout ») ?
- S'il s'agit d'aires ou de volumes, ai-je bien tenu compte du fait qu'ils ne sont pas proportionnels aux longueurs (multiplier par k donne k^2 ou k^3) ?

- Mon résultat est-il vraisemblable, en ordre de grandeur, par rapport à la situation ?