MATHÉMATIQUES

Maîtriser le produit scalaire

Une fiche d'exercices pour calculer un produit scalaire, reconnaître l'orthogonalité et déterminer un angle

① POURQUOI CETTE FICHE ?

Le produit scalaire associe à deux vecteurs un nombre. Il sert surtout à reconnaître l'orthogonalité (deux vecteurs sont perpendiculaires exactement quand leur produit scalaire est nul) et à calculer des angles. On dispose de deux formules selon les données : l'une avec les coordonnées, l'autre avec les normes et l'angle. La difficulté est de choisir la bonne formule et de se souvenir que le résultat est un nombre, pas un vecteur.

Cette fiche reprend chaque savoir-faire : calculer avec les coordonnées, reconnaître l'orthogonalité, utiliser les normes et l'angle, et démontrer un angle droit dans un repère. Le repère est orthonormé.

② CALCULER UN PRODUIT SCALAIRE AVEC LES COORDONNÉES

Remarque 1 (La formule avec les coordonnées). Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

On multiplie les abscisses entre elles, les ordonnées entre elles, et on additionne (jamais en croix).

Exercice 1 *Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$*

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$

③ RECONNAÎTRE L'ORTHOGONALITÉ

Remarque 2 (Produit scalaire nul). Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. C'est l'outil de référence pour prouver un angle droit, ou pour trouver un paramètre rendant deux vecteurs perpendiculaires.

Exercice 2 *Orthogonaux ou non ?*

a) Les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

b) Les vecteurs $\vec{c}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{d}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

c) Déterminer le réel t pour que $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\t\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

4 UTILISER LES NORMES ET L'ANGLE

Remarque 3 (La formule avec les normes et l'angle). Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et θ est l'angle qu'ils forment, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\theta)$. On utilise cette formule quand on connaît les longueurs et l'angle, et non les coordonnées.

Exercice 3 *Calculer avec les normes*

a) $||\vec{u}|| = 5$, $||\vec{v}|| = 4$ et $\theta = 60°$.
b) $||\vec{u}|| = 3$, $||\vec{v}|| = 2$ et $\theta = 90°$.
c) $||\vec{u}|| = 2$, $||\vec{v}|| = 6$ et $\theta = 180°$.

5 CALCULER UNE NORME ET UN ANGLE

Remarque 4 (Norme et angle à partir des coordonnées). La norme de $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$. Pour trouver un angle, on isole le cosinus : $\cos(\theta) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||}$.

Exercice 4 *Norme et angle*

a) Calculer la norme de $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

b) Déterminer l'angle entre $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$.

c) Déterminer l'angle entre $\vec{a}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

6 DÉMONTRER UN ANGLE DROIT DANS UN REPÈRE

Remarque 5 (Du produit scalaire à la nature du triangle). Pour montrer qu'un triangle est rectangle en un sommet, on calcule le produit scalaire des deux vecteurs partant de ce sommet : s'il est nul, l'angle est droit. En comparant aussi les longueurs, on précise si le triangle est de plus isocèle.

Exercice 5 *Nature d'un triangle* Dans un repère orthonormé, on donne $A(2\ ;\ 1)$, $B(5\ ;\ 2)$ et $C(1\ ;\ 4)$.

a) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, puis les longueurs AB et AC.
c) En déduire la nature précise du triangle ABC.

7 POUR S'AUTO-ÉVALUER

Remarque 6 (Cinq questions à se poser). Avant et pendant un exercice sur le produit scalaire, prendre l'habitude de se poser ces cinq questions.

- Quelles données ai-je : des coordonnées (formule $xx'+yy'$) ou des normes et un angle (formule $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\theta$) ?
- Avec les coordonnées, ai-je bien multiplié x par x' et y par y' (et non en croix) ?
- Le résultat est un **nombre** : ai-je évité de lui donner des coordonnées ?
- Pour reconnaître un angle droit, ai-je vérifié que le produit scalaire est **nul** ?
- Pour un angle, ai-je bien isolé $\cos(\theta) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$ avant de conclure ?

SOLUTIONS DES EXERCICES

Corrigé de l'exercice 1.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + (-1) \times 5 = 6 - 5 = 1.$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times (-1) + 2 \times 3 = -4 + 6 = 2.$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2) \times 5 + 5 \times 2 = -10 + 10 = 0.$

Corrigé de l'exercice 2.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \times 2 + (-3) \times 4 = 12 - 12 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux.

b) $\vec{c} \cdot \vec{d} = 1 \times 3 + 2 \times 1 = 5 \neq 0$: les vecteurs ne sont pas orthogonaux.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 + t \times (-1) = 6 - t$. Ils sont orthogonaux lorsque $6 - t = 0$, soit $t = 6$.

Corrigé de l'exercice 3.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times 4 \times \cos(60°) = 20 \times \dfrac{1}{2} = 10.$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 \times \cos(90°) = 6 \times 0 = 0$ (les vecteurs sont orthogonaux).

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 6 \times \cos(180°) = 12 \times (-1) = -12.$

Corrigé de l'exercice 4.

a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 0 + 2 \times 3 = 6$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 3$. Donc $\cos(\theta) = \dfrac{6}{2\sqrt{2} \times 3} = \dfrac{6}{6\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, d'où $\theta = 45°$.

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 + 0 \times \sqrt{3} = 1$, $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{1+3} = 2$. Donc $\cos(\theta) = \dfrac{1}{1 \times 2} = \dfrac{1}{2}$, d'où $\theta = 60°$.

Corrigé de l'exercice 5.

a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 5-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-2 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3 \times (-1) + 1 \times 3 = -3 + 3 = 0$. De plus, $\mathrm{AB} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ et $\mathrm{AC} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

c) Le produit scalaire est nul, donc le triangle est rectangle en A. Et comme $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = \sqrt{10}$, il est aussi isocèle : le triangle ABC est **rectangle isocèle en** A.