MATHÉMATIQUES

Maîtriser les probabilités conditionnelles

Une fiche d'exercices pour calculer avec un arbre pondéré, les probabilités totales et l'indépendance

① POURQUOI CETTE FICHE ?

Une probabilité conditionnelle mesure la chance d'un événement *sachant* qu'un autre est réalisé. L'outil central est l'arbre pondéré, qui organise toutes les probabilités et permet de tout calculer. La difficulté majeure est de ne pas confondre $P_A(B)$ et $P_B(A)$, qui ont des dénominateurs différents et ne sont en général pas égales.

Cette fiche reprend chaque savoir-faire : calculer une probabilité conditionnelle, construire un arbre et appliquer la formule des probabilités totales, calculer une probabilité « à rebours », et reconnaître l'indépendance.

② CALCULER UNE PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Remarque 1 (La formule de base). $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ (avec $P(A) \neq 0$). On en déduit la probabilité d'une intersection : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Exercice 1 *Appliquer la formule*

a) On donne $P(A) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$. Calculer $P_A(B)$.
b) On donne $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$. Calculer $P_B(A)$.
c) On donne $P(A) = 0{,}6$ et $P_A(B) = 0{,}3$. Calculer $P(A \cap B)$.

③ CONSTRUIRE UN ARBRE ET UTILISER LES PROBABILITÉS TOTALES

Remarque 2 (Les deux règles de l'arbre). Sur un arbre pondéré, la probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités rencontrées le long de ce chemin ; la probabilité d'un événement est la **somme** des probabilités des chemins qui y mènent (formule des probabilités totales).

Exercice 2 *Deux machines* Dans une usine, la machine M_1 fabrique $60\,\%$ des pièces et la machine M_2 les $40\,\%$ restants. La machine M_1 produit $5\,\%$ de pièces défectueuses, la machine M_2 en produit $8\,\%$. On choisit une pièce au hasard et on note D l'événement « la pièce est défectueuse ».

a) Décrire l'arbre pondéré de la situation.
b) Calculer la probabilité $P(M_1 \cap D)$ qu'une pièce vienne de M_1 et soit défectueuse.
c) Calculer la probabilité $P(D)$ qu'une pièce soit défectueuse.

④ CALCULER UNE PROBABILITÉ CONDITIONNELLE À REBOURS

Remarque 3 (Inverser le conditionnement). Connaissant une intersection et une probabilité totale, on peut « remonter » l'arbre : $P_D(M_1) = \dfrac{P(M_1 \cap D)}{P(D)}$. Cette probabilité, souvent contre-intuitive, est différente de $P_{M_1}(D)$.

Exercice 3 *D'où vient la pièce défectueuse ?* On reprend la situation des deux machines ($P(M_1 \cap D) = 0{,}03$ et $P(D) = 0{,}062$). Une pièce prélevée est défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine M_1.

⑤ RECONNAÎTRE L'INDÉPENDANCE

Remarque 4 (Le test de l'indépendance). Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Il faut le **vérifier** : l'indépendance n'est jamais automatique.

Exercice 4 *Indépendants ou non ?* Dans chaque cas, dire si A et B sont indépendants.

a) $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$.
b) $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$.

⑥ UN PROBLÈME COMPLET

Exercice 5 *Le bus et les retards* Dans un collège, 70 % des élèves prennent le bus. Parmi ceux qui prennent le bus, 20 % arrivent en retard ; parmi les autres, 10 % arrivent en retard. On choisit un élève au hasard et on note B « l'élève prend le bus » et R « l'élève arrive en retard ».

a) Décrire l'arbre pondéré.
b) Calculer la probabilité $P(R)$ qu'un élève arrive en retard.
c) Un élève est arrivé en retard. Calculer la probabilité qu'il ait pris le bus.

⑦ POUR S'AUTO-ÉVALUER

Remarque 5 (Cinq questions à se poser). Avant et pendant un exercice de probabilités conditionnelles, prendre l'habitude de se poser ces cinq questions.

- Quel est l'événement *sachant* lequel je calcule ? C'est lui qui figure au dénominateur.
- Pour une intersection, ai-je bien **multiplié** le long d'une branche, et non additionné ?
- Pour une probabilité totale, ai-je additionné **tous** les chemins qui mènent à l'événement ?
- Quand je calcule « à rebours » ($P_D(M_1)$), ai-je bien mis l'intersection au numérateur et la probabilité totale au dénominateur ?
- Pour l'indépendance, ai-je **vérifié** l'égalité $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, sans la supposer ?

SOLUTIONS DES EXERCICES

Corrigé de l'exercice 1.

a) $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,1}{0,4} = 0,25$.
b) $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,2}{0,5} = 0,4$.
c) $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$.

Corrigé de l'exercice 2.

a) L'arbre a deux branches principales : M_1 (probabilité $0,6$) et M_2 (probabilité $0,4$). De M_1 partent D $(0,05)$ et $\overline{D}$ $(0,95)$; de M_2 partent D $(0,08)$ et $\overline{D}$ $(0,92)$.
b) $P(M_1 \cap D) = P(M_1) \times P_{M_1}(D) = 0,6 \times 0,05 = 0,03$.
c) D'après la formule des probabilités totales : $P(D) = P(M_1) \times P_{M_1}(D) + P(M_2) \times P_{M_2}(D) = 0,03 + 0,4 \times 0,08 = 0,03 + 0,032 = 0,062$.

Corrigé de l'exercice 3. $P_D(M_1) = \dfrac{P(M_1 \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,03}{0,062} \approx 0,48$. Sachant qu'une pièce est défectueuse, elle a environ $48\,\%$ de chances de venir de M_1 (et donc environ $52\,\%$ de venir de M_2, bien que M_2 fabrique moins de pièces : c'est parce que M_2 est plus souvent défectueuse).

Corrigé de l'exercice 4.

a) $P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,4 = 0,2 = P(A \cap B)$: les événements sont indépendants.
b) $P(A) \times P(B) = 0,3 \times 0,6 = 0,18 \neq 0,2 = P(A \cap B)$: les événements ne sont pas indépendants.

Corrigé de l'exercice 5.

a) Deux branches principales : B $(0,7)$ et $\overline{B}$ $(0,3)$. De B partent R $(0,2)$ et $\overline{R}$ $(0,8)$; de $\overline{B}$ partent R $(0,1)$ et $\overline{R}$ $(0,9)$.
b) $P(R) = 0,7 \times 0,2 + 0,3 \times 0,1 = 0,14 + 0,03 = 0,17$.
c) $P_R(B) = \dfrac{P(B \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0,14}{0,17} \approx 0,82$. Sachant qu'un élève est en retard, il a environ $82\,\%$ de chances d'avoir pris le bus.