

Maîtriser la loi binomiale

Une fiche d'exercices pour reconnaître un schéma de Bernoulli, manier les coefficients binomiaux et calculer des probabilités

Fiche de cours : La loi binomiale.

① POURQUOI CETTE FICHE ?

La loi binomiale est le premier modèle probabiliste que l'on applique « en série » : répéter une expérience à deux issues et compter les succès. Les erreurs viennent rarement de la formule elle-même ; elles viennent d'un modèle appliqué hors de ses conditions (tirages sans remise), d'un coefficient binomial oublié, ou d'un événement mal traduit (« au moins », « au plus », « moins de »).

Cette fiche isole chaque geste : reconnaître le modèle, construire et lire le triangle de Pascal, démasquer les erreurs fréquentes, calculer avec la formule, traduire un événement pour la calculatrice, utiliser l'espérance et l'écart-type, puis résoudre deux problèmes concrets, dont l'un fait appel au logarithme.

② RECONNAÎTRE LE MODÈLE

Remarque 1 (Les trois conditions). Une loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$ modélise le nombre de succès lorsque : chaque épreuve a **deux issues** ; les n épreuves sont **identiques** (même p) ; elles sont **indépendantes**. Un tirage sans remise fait tomber les deux dernières conditions.

Exercice 1 *Épreuve, schéma, ou ni l'un ni l'autre ?* Pour chaque situation, dire s'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli, d'un schéma de Bernoulli (préciser alors n et p), ou ni l'un ni l'autre.

- a) Lancer une pièce équilibrée et regarder si l'on obtient « pile ».
- b) Lancer huit pièces équilibrées et compter les « pile ».
- c) Tirer trois cartes sans remise et compter les rois.
- d) Cinquante clients, indépendamment les uns des autres, achètent un produit avec la probabilité 0,3 ; on compte les acheteurs.
- e) Mesurer la taille d'un élève choisi au hasard.
- f) Répondre au hasard à un questionnaire de 20 questions « vrai ou faux » et compter les bonnes réponses.

③ COEFFICIENTS BINOMIAUX

Remarque 2 (Le triangle de Pascal). Chaque ligne commence et finit par 1 ; chaque autre nombre est la somme des deux nombres situés au-dessus de lui. La ligne n donne $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$, et sa somme vaut 2^n (nombre total de chemins de l'arbre).

Exercice 2 Construire le triangle de Pascal La ligne $n = 6$ du triangle est 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

- a) Écrire les lignes $n = 7$ et $n = 8$.
- b) En déduire $\binom{8}{3}$ et $\binom{7}{4}$.
- c) Calculer la somme des nombres de la ligne 7 et interpréter le résultat.

Exercice 3 Démasquer l'erreur Chaque affirmation contient une erreur. La repérer et la corriger.

- a) « $\binom{6}{2} = \frac{6^2}{2} = 18$. »
- b) « Si X suit $\mathcal{B}(n ; p)$, alors $P(X = 2) = p^2(1 - p)^{n-2}$. »
- c) « $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 1)$. »
- d) « Si X suit $\mathcal{B}(n ; p)$, alors $V(X) = np$. »

④ CALCULER DES PROBABILITÉS

Remarque 3 (La formule et la calculatrice). $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$. La calculatrice donne $P(X = k)$ et $P(X \leq k)$; tout autre événement se ramène à ces deux formes : $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$, $P(X < k) = P(X \leq k - 1)$, $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a - 1)$.

Exercice 4 Calculer avec la formule X suit la loi $\mathcal{B}(5 ; 0,3)$. Calculer, en détaillant, puis arrondir au millièm :

- | | | |
|---------------|------------------|------------------|
| a) $P(X = 0)$ | b) $P(X = 1)$ | c) $P(X = 2)$ |
| d) $P(X = 5)$ | e) $P(X \leq 2)$ | f) $P(X \geq 3)$ |

Exercice 5 Traduire un événement X suit une loi binomiale. Pour chaque événement, écrire l'inégalité correspondante avec X , puis l'exprimer uniquement à l'aide de probabilités de la forme $P(X \leq k)$, comme le demande la calculatrice.

- | | |
|------------------------------------|-------------------------|
| a) « au moins 3 succès » | b) « au plus 4 succès » |
| c) « moins de 2 succès » | d) « plus de 5 succès » |
| e) « entre 2 et 5 succès, inclus » | f) « aucun succès » |

⑤ ESPÉRANCE ET ÉCART-TYPE

Exercice 6 Paramètres et indicateurs

- a) X suit $\mathcal{B}(100 ; 0,1)$. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
- b) Y suit $\mathcal{B}(60 ; 0,5)$. Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$ (arrondir au centième).
- c) Z suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$ avec $E(Z) = 15$ et $V(Z) = 12$. Déterminer p puis n .

⑥ PROBLÈMES EN CONTEXTE

Exercice 7 *Des ampoules par boîte de douze* Un fabricant produit des ampoules dont 5 % sont défectueuses. Elles sont vendues par boîtes de 12, constituées au hasard dans une production très importante. On note X le nombre d'ampoules défectueuses d'une boîte.

- Justifier que X suit $\mathcal{B}(12 ; 0,05)$.
- Calculer la probabilité qu'une boîte ne contienne aucune ampoule défectueuse, puis qu'elle en contienne au moins une (arrondir au millième).
- Le fabricant rembourse toute boîte contenant au moins deux ampoules défectueuses. Calculer la probabilité de remboursement. Sur 1000 boîtes vendues, combien de remboursements peut-on prévoir ?
- Calculer $E(X)$.

Exercice 8 *Combien de tickets acheter ?* Un ticket de tombola est gagnant avec la probabilité 0,05, indépendamment des autres. On achète n tickets et X compte les tickets gagnants.

- Exprimer $P(X \geq 1)$ en fonction de n .
- Combien de tickets faut-il acheter au minimum pour avoir au moins une chance sur deux de gagner ? Résoudre avec le logarithme, puis vérifier.
- Même question pour avoir au moins 95 % de chances de gagner.

⑦ POUR S'AUTO-ÉVALUER

Remarque 4 (Cinq questions à se poser).

- Ai-je vérifié les trois conditions (deux issues, épreuves identiques, indépendance) avant d'écrire $\mathcal{B}(n ; p)$?
- Ai-je écrit ce que compte X et la valeur de n et de p ?
- Dans $P(X = k)$, ai-je bien mis le coefficient binomial, p^k et $(1 - p)^{n-k}$?
- Ai-je traduit « au moins », « au plus », « moins de » par la bonne inégalité, et pensé au complémentaire ?
- Ai-je distingué $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$?

SOLUTIONS DES EXERCICES

Corrigé de l'exercice 1.

- a) Épreuve de Bernoulli, $p = 0,5$.
- b) Schéma de Bernoulli, $n = 8, p = 0,5$: les pièces sont identiques et indépendantes.
- c) Ni l'un ni l'autre : sans remise, la probabilité de tirer un roi change à chaque carte.
- d) Schéma de Bernoulli, $n = 50, p = 0,3$ (succès « le client achète »).
- e) Ni l'un ni l'autre : une taille n'est pas une issue binaire.
- f) Schéma de Bernoulli, $n = 20, p = 0,5$.

Corrigé de l'exercice 2.

- a) Ligne 7 : 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1. Ligne 8 : 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.
- b) $\binom{8}{3} = 56$ (quatrième nombre de la ligne 8) et $\binom{7}{4} = 35$.
- c) $1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128 = 2^7$: c'est le nombre total de chemins d'un arbre à 7 épreuves, chaque épreuve doublant le nombre de chemins.

Corrigé de l'exercice 3.

- a) $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$. Un coefficient binomial n'est pas une puissance.
- b) Il manque le nombre de chemins : $P(X = 2) = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$.
- c) Le contraire de $X \geq 2$ est $X \leq 1$, qui regroupe $X = 0$ et $X = 1$: $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$.
- d) np est l'espérance ; la variance est $V(X) = np(1-p)$.

Corrigé de l'exercice 4.

- a) $P(X = 0) = 0,7^5 \approx 0,168$.
- b) $P(X = 1) = \binom{5}{1} \times 0,3 \times 0,7^4 = 5 \times 0,3 \times 0,2401 \approx 0,360$.
- c) $P(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0,3^2 \times 0,7^3 = 10 \times 0,09 \times 0,343 \approx 0,309$.
- d) $P(X = 5) = 0,3^5 \approx 0,002$.
- e) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0,168 + 0,360 + 0,309 = 0,837$.
- f) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0,837 = 0,163$.

Corrigé de l'exercice 5.

- a) $X \geq 3$: $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$.
- b) $X \leq 4$: directement $P(X \leq 4)$.

- c) $X < 2$, soit $X \leq 1 : P(X \leq 1)$.
- d) $X > 5$, soit $X \geq 6 : 1 - P(X \leq 5)$.
- e) $2 \leq X \leq 5 : P(X \leq 5) - P(X \leq 1)$.
- f) $X = 0 : P(X \leq 0)$, c'est-à-dire $(1 - p)^n$.

Corrigé de l'exercice 6.

- a) $E(X) = 100 \times 0,1 = 10$; $V(X) = 100 \times 0,1 \times 0,9 = 9$, donc $\sigma(X) = 3$.
- b) $E(Y) = 60 \times 0,5 = 30$; $V(Y) = 60 \times 0,5 \times 0,5 = 15$, donc $\sigma(Y) = \sqrt{15} \approx 3,87$.
- c) $np = 15$ et $np(1 - p) = 12$, donc $15(1 - p) = 12$, d'où $1 - p = 0,8$ et $p = 0,2$. Alors $n = \frac{15}{0,2} = 75$.

Corrigé de l'exercice 7.

- a) Chaque ampoule est défectueuse (succès, $p = 0,05$) ou non ; la production étant très importante, les 12 ampoules d'une boîte sont assimilées à des épreuves identiques et indépendantes. X suit $\mathcal{B}(12 ; 0,05)$.
- b) $P(X = 0) = 0,95^{12} \approx 0,540$ et $P(X \geq 1) = 1 - 0,540 = 0,460$.
- c) $P(X = 1) = 12 \times 0,05 \times 0,95^{11} \approx 0,341$, donc $P(X \leq 1) \approx 0,881$ et $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0,119$. Sur 1000 boîtes, on prévoit environ 119 remboursements.
- d) $E(X) = 12 \times 0,05 = 0,6$ ampoule défectueuse par boîte en moyenne.

Corrigé de l'exercice 8.

- a) X suit $\mathcal{B}(n ; 0,05)$ et $P(X \geq 1) = 1 - 0,95^n$.
- b) $1 - 0,95^n \geq 0,5 \iff 0,95^n \leq 0,5 \iff n \geq \frac{\ln 0,5}{\ln 0,95} \approx 13,5$ (sens changé car $\ln 0,95 < 0$). Il faut 14 tickets.
Vérification : $0,95^{13} \approx 0,513$ et $0,95^{14} \approx 0,488$.
- c) $0,95^n \leq 0,05 \iff n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,95} \approx 58,4$: il faut 59 tickets. Passer de une chance sur deux à 95 % demande plus de quatre fois plus de tickets.