

Maîtriser les primitives et les intégrales

Une fiche d'exercices pour remonter d'une dérivée à une primitive, calculer une intégrale et interpréter une aire

Fiche de cours : Primitives et intégrales.

① POURQUOI CETTE FICHE ?

Chercher une primitive, c'est dériver à l'envers : la plupart des erreurs viennent de ce renversement, quand on dérive au lieu de remonter, quand on oublie le coefficient qui compense la dérivée intérieure, ou quand on confond $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$. Calculer une intégrale ajoute une seule étape, $F(b) - F(a)$, mais demande de garder le sens des signes : une intégrale peut être négative alors qu'une aire ne l'est jamais.

Cette fiche isole chaque geste : les primitives usuelles, la détection des erreurs classiques, la reconnaissance des formes $u' g(u)$, le choix de la primitive qui vérifie une condition, le calcul d'intégrales, les aires, les propriétés, puis un problème où l'intégrale mesure une quantité accumulée.

② REMONTER D'UNE DÉRIVÉE À UNE PRIMITIVE

Remarque 1 (Le réflexe de vérification). Une primitive proposée se vérifie toujours en la dérivant : on doit retrouver exactement la fonction de départ. Ce contrôle prend dix secondes et élimine la quasi-totalité des erreurs.

Exercice 1 Primitives usuelles Donner une primitive de chaque fonction (sur $]0 ; +\infty[$ lorsque c'est nécessaire).

a) $f(x) = x^5$

b) $g(x) = 3$

c) $h(x) = \frac{1}{x^2}$

d) $k(x) = e^x$

e) $m(x) = \frac{1}{x}$

f) $n(x) = 4x^3 - 2x + 7$

Exercice 2 Démasquer l'erreur Chaque affirmation contient une erreur. La repérer, l'expliquer, puis donner une primitive correcte.

a) « Une primitive de x^2 est $2x$. »

b) « Une primitive de e^{5x} est e^{5x} . »

c) « Une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$ est $-\frac{1}{x^2}$. »

d) « Une primitive de $(2x + 3)^4$ est $\frac{(2x + 3)^5}{5}$. »

Remarque 2 (Reconnaître la forme $u' g(u)$). Repérer une fonction « intérieure » u , calculer u' , vérifier qu'il apparaît en facteur (à un coefficient près). Formes à connaître : $u' e^u \rightarrow e^u$; $\frac{u'}{u} \rightarrow \ln u$ ($u > 0$) ; $u' u^n \rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$; $\frac{u'}{u^2} \rightarrow -\frac{1}{u}$.

Exercice 3 *Reconnaître la forme $u' g(u)$* Donner une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$

b) $g(x) = 3x^2 e^{x^3}$ sur $\mathbb{R}$

c) $h(x) = 2x (x^2 + 1)^3$ sur $\mathbb{R}$

d) $k(x) = \frac{1}{3x - 2}$ sur $\left] \frac{2}{3} ; +\infty \right[$

e) $m(x) = e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

f) $n(x) = \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 5)^2}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 *La primitive qui vérifie une condition*

a) Déterminer la primitive F de $f(x) = 3x^2 - 1$ telle que $F(1) = 0$.

b) Déterminer la primitive G de $g(x) = e^{2x}$ telle que $G(0) = 1$.

c) Déterminer la primitive H de $h(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$ telle que $H(e) = 3$.

③ CALCULER DES INTÉGRALES ET DES AIRES

Remarque 3 (Le théorème fondamental). $\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$: on écrit la primitive entre crochets, puis borne du haut moins borne du bas. Si $f \geq 0$, c'est l'aire sous la courbe ; si $f \leq 0$, c'est l'opposé de l'aire.

Exercice 5 *Calculer des intégrales*

a) $I = \int_1^2 (3x^2 - 2x) dx$

b) $J = \int_0^1 e^{2x} dx$

c) $K = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

d) $L = \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx$

e) $M = \int_{-1}^1 x^3 dx$

f) $N = \int_0^4 (x^2 - 4x) dx$

Exercice 6 *Aires* Soient $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = x^2$.

a) Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de f et l'axe des abscisses sur $[-2 ; 2]$.

b) Résoudre $f(x) \geq g(x)$. En déduire l'aire du domaine compris entre les deux courbes (valeur exacte puis arrondie au centième).

④ PROPRIÉTÉS ET APPLICATIONS

Exercice 7 *Utiliser les propriétés* On sait que $\int_1^4 f(x) dx = 6$ et $\int_1^4 g(x) dx = -2$.

a) Calculer $\int_1^4 (2f(x) - g(x)) dx$, $\int_4^1 f(x) dx$ et $\int_1^4 (f(x) + 3) dx$.

b) Donner la valeur moyenne de f sur $[1 ; 4]$.

c) Sans calculer, encadrer $\int_0^1 e^{x^2} dx$ en encadrant d'abord e^{x^2} sur $[0 ; 1]$.

Exercice 8 *Une quantité accumulée* Le nombre de naissances par an dans une population est modélisé par $r(t) = 100 e^{0,05t}$, où t est le temps en années depuis 2025. Le nombre total de naissances entre les instants 0 et 10 est $\int_0^{10} r(t) dt$.

- Donner une primitive de r .
- Calculer le nombre total de naissances sur la période 2025-2035 (arrondir à l'unité).
- En déduire le nombre moyen de naissances par an sur cette période. Comparer avec $r(0)$ et $r(10)$.

⑤ POUR S'AUTO-ÉVALUER

Remarque 4 (Cinq questions à se poser).

- Ai-je remonté (exposant +1, division par le nouvel exposant) et non dérivé?
- Ai-je dérivé ma primitive pour vérifier qu'elle redonne exactement la fonction?
- Pour une forme $u' g(u)$, ai-je ajusté le coefficient qui compense u' ?
- Dans $F(b) - F(a)$, ai-je bien mis la borne du haut en premier?
- Si la fonction est négative, ai-je distingué l'intégrale (négative) de l'aire (positive)?

SOLUTIONS DES EXERCICES

Corrigé de l'exercice 1.

- a) $F(x) = \frac{x^6}{6}$.
- b) $G(x) = 3x$.
- c) $H(x) = -\frac{1}{x}$.
- d) $K(x) = e^x$.
- e) $M(x) = \ln x$.
- f) $N(x) = x^4 - x^2 + 7x$.

Chaque réponse se vérifie en dérivant : par exemple $(x^4 - x^2 + 7x)' = 4x^3 - 2x + 7$. ✓

Corrigé de l'exercice 2.

- a) $2x$ est la *dérivée* de x^2 . Une primitive est $\frac{x^3}{3}$, dont la dérivée est x^2 .
- b) La dérivée de e^{5x} est $5e^{5x}$, pas e^{5x} : il manque le coefficient compensateur. Une primitive est $\frac{1}{5}e^{5x}$.
- c) $-\frac{1}{x^2}$ est la *dérivée* de $\frac{1}{x}$. Une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln x$.
- d) La dérivée de $\frac{(2x+3)^5}{5}$ est $\frac{5 \times 2(2x+3)^4}{5} = 2(2x+3)^4$: il manque le facteur $\frac{1}{2}$ qui compense $u' = 2$. Une primitive est $\frac{(2x+3)^5}{10}$.

Corrigé de l'exercice 3.

- a) $u = x^2 + 1 > 0$, $u' = 2x$: $f = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$, donc $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$.
- b) $u = x^3$, $u' = 3x^2$: $g = u'e^u$, donc $G(x) = e^{x^3}$.
- c) $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$: $h = u'u^3$, donc $H(x) = \frac{(x^2 + 1)^4}{4}$.
- d) $u = 3x - 2 > 0$, $u' = 3$: $k = \frac{1}{3} \times \frac{u'}{u}$, donc $K(x) = \frac{1}{3} \ln(3x - 2)$.
- e) $u = -x$, $u' = -1$: $m = -u'e^u$, donc $M(x) = -e^{-x}$. Vérification : $(-e^{-x})' = -(-1)e^{-x} = e^{-x}$. ✓
- f) $u = x^2 + 2x + 5$ (discriminant $4 - 20 < 0$, donc $u > 0$), $u' = 2x + 2$: $n = \frac{u'}{u^2}$, donc $N(x) = -\frac{1}{x^2 + 2x + 5}$.

Corrigé de l'exercice 4.

- a) Les primitives sont $F(x) = x^3 - x + C$. $F(1) = 1 - 1 + C = C = 0$, donc $F(x) = x^3 - x$.
- b) $G(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$ et $G(0) = \frac{1}{2} + C = 1$, donc $C = \frac{1}{2}$: $G(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}$.
- c) $H(x) = \ln x + C$ et $H(e) = 1 + C = 3$, donc $C = 2$: $H(x) = \ln x + 2$.

Corrigé de l'exercice 5.

- a) $I = \left[x^3 - x^2 \right]_1^2 = (8 - 4) - (1 - 1) = 4.$
- b) $J = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 1}{2} \approx 3,19.$
- c) $K = \left[2\sqrt{x} \right]_1^4 = 2 \times 2 - 2 \times 1 = 2.$
- d) $L = \left[\ln(x - 1) \right]_2^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0,69.$
- e) $M = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$: la courbe de x^3 est symétrique par rapport à l'origine, les deux aires (sous l'axe puis au-dessus) se compensent.
- f) $N = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right]_0^4 = \frac{64}{3} - 32 = -\frac{32}{3}$: sur $[0 ; 4]$, $x^2 - 4x = x(x - 4) \leq 0$, la courbe est sous l'axe, l'aire du domaine vaut $\frac{32}{3}$.

Corrigé de l'exercice 6.

- a) Sur $[-2 ; 2]$, $f(x) = 4 - x^2 \geq 0$. $\mathcal{A}_1 = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \approx 10,67$ unités d'aire.
- b) $4 - x^2 \geq x^2 \iff x^2 \leq 2 \iff -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Sur cet intervalle, la parabole f est au-dessus de g :

$$\mathcal{A}_2 = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - 2x^2) dx = \left[4x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 2 \left(4\sqrt{2} - \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{3} \right) = 2 \times \frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3} \approx 7,54.$$

(On a utilisé $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$ et la symétrie des bornes.)

Corrigé de l'exercice 7.

- a) Linéarité : $2 \times 6 - (-2) = 14$. Bornes échangées : -6 . Linéarité avec la constante : $6 + 3 \times (4 - 1) = 6 + 9 = 15$.
- b) $\mu = \frac{1}{4 - 1} \times 6 = 2$.
- c) Pour $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq x^2 \leq 1$, donc $1 \leq e^{x^2} \leq e$. Par croissance de l'intégrale, $\int_0^1 1 dx \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq \int_0^1 e dx$, soit $1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e \approx 2,72$. (Cette intégrale n'a pas de primitive exprimable avec les fonctions usuelles : l'encadrement est la seule voie.)

Corrigé de l'exercice 8.

- a) $u = 0,05t$, $u' = 0,05$: $r = \frac{100}{0,05} \times 0,05 e^{0,05t}$, donc $R(t) = 2000 e^{0,05t}$. Vérification : $R'(t) = 2000 \times 0,05 e^{0,05t} = 100 e^{0,05t}$. ✓
- b) $\int_0^{10} r(t) dt = \left[2000 e^{0,05t} \right]_0^{10} = 2000 (e^{0,5} - 1) \approx 1297$ naissances.
- c) Moyenne : $\frac{1297}{10} \approx 130$ naissances par an. C'est compris entre $r(0) = 100$ et $r(10) = 100 e^{0,5} \approx 165$: la valeur moyenne d'une fonction croissante est comprise entre ses valeurs aux bornes.