MATHÉMATIQUES

Maîtriser la géométrie dans l'espace

Une fiche d'exercices pour calculer avec des coordonnées à trois dimensions : vecteurs, distance, colinéarité, produit scalaire

① POURQUOI CETTE FICHE ?

Dans l'espace, on repère un point par trois coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$. Les outils du plan se prolongent presque sans changement : coordonnées d'un vecteur, distance, milieu, colinéarité, produit scalaire. Il suffit d'ajouter partout la troisième coordonnée. La difficulté principale est justement de ne pas oublier la coordonnée z, et de bien visualiser la situation.

Cette fiche reprend chaque savoir-faire : coordonnées d'un vecteur, distance et milieu, colinéarité, produit scalaire et orthogonalité, puis démonstration d'un angle droit. Le repère est orthonormé.

② COORDONNÉES D'UN VECTEUR DANS L'ESPACE

Remarque 1 (La formule avec la troisième coordonnée). Pour $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\ ;\ y_\mathrm{A}\ ;\ z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\ ;\ y_\mathrm{B}\ ;\ z_\mathrm{B})$, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A} \\ y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A} \\ z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A} \end{pmatrix}$. On soustrait coordonnée par coordonnée, sans oublier z.

Exercice 1 *Calculer des coordonnées*

a) $\mathrm{A}(1\ ;\ 0\ ;\ 2)$ et $\mathrm{B}(3\ ;\ -1\ ;\ 4)$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

b) $\mathrm{C}(-2\ ;\ 3\ ;\ 1)$ et $\mathrm{D}(0\ ;\ 3\ ;\ 5)$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$.

c) On sait que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et que $\mathrm{A}(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$. Déterminer les coordonnées de B.

③ DISTANCE ET MILIEU

Remarque 2 (Distance et milieu dans l'espace). Dans un repère orthonormé, $\mathrm{AB} = \sqrt{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2+(z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A})^2}$ (penser au carré de la troisième coordonnée). Le milieu I de $[\mathrm{AB}]$ a pour coordonnées la moyenne des coordonnées de A et B.

Exercice 2 *Calculer une distance et un milieu* On donne $\mathrm{A}(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$ et $\mathrm{B}(4\ ;\ 0\ ;\ 5)$.

a) Calculer la distance AB.

b) Déterminer les coordonnées du milieu I de $[\mathrm{AB}]$.

4 COLINÉARITÉ

Remarque 3 (Un vecteur multiple de l'autre). Deux vecteurs sont colinéaires lorsque l'un est un multiple de l'autre : $\vec{u} = k\,\vec{v}$. Pour le vérifier, on cherche un réel k qui convient pour la première coordonnée, puis on contrôle qu'il convient aussi pour les deux autres.

Exercice 3 *Colinéaires ou non ?*

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\-6\\3\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$

5 PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

Remarque 4 (La troisième coordonnée s'ajoute). Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$. Comme dans le plan, deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Exercice 4 *Produit scalaire et orthogonalité*

a) Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ pour $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$. Sont-ils orthogonaux ?

b) Calculer $\vec{a}\cdot\vec{b}$ pour $\vec{a}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$. Sont-ils orthogonaux ?

c) Déterminer le réel t pour que $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\t\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

6 DÉMONTRER UN ANGLE DROIT DANS L'ESPACE

Remarque 5 (Le produit scalaire prouve l'angle droit). Pour montrer qu'un triangle est rectangle en un sommet, on calcule le produit scalaire des deux vecteurs partant de ce sommet : s'il est nul, l'angle est droit. La méthode est la même que dans le plan, avec une coordonnée de plus.

Exercice 5 *Nature d'un triangle dans l'espace* Dans un repère orthonormé, on donne $A(2\,;\,1\,;\,0)$, $B(4\,;\,1\,;\,2)$ et $C(1\,;\,3\,;\,1)$.

a) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
c) En déduire la nature du triangle ABC.

7 POUR S'AUTO-ÉVALUER

Remarque 6 (Cinq questions à se poser). Avant et pendant un exercice de géométrie dans l'espace, prendre l'habitude de se poser ces cinq questions.

- Ai-je bien utilisé les **trois** coordonnées, sans oublier z, dans chaque calcul ?
- Pour une distance, ai-je ajouté le carré de la troisième coordonnée sous la racine ?
- Pour la colinéarité, ai-je vérifié qu'un **même** coefficient k convient pour les trois coordonnées ?
- Pour le produit scalaire, ai-je bien ajouté le produit zz' ?
- Pour un angle droit, est-ce bien le produit scalaire **nul** qui me permet de conclure ?

SOLUTIONS DES EXERCICES

Corrigé de l'exercice 1.

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\-1-0\\4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0-(-2)\\3-3\\5-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$.

c) Les coordonnées de B sont celles de A augmentées de celles de $\overrightarrow{AB}$: $B(1+3\ ;\ 1-2\ ;\ 1+1)$, soit $B(4\ ;\ -1\ ;\ 2)$.

Corrigé de l'exercice 2.

a) $AB=\sqrt{(4-2)^2+(0-(-1))^2+(5-3)^2}=\sqrt{4+1+4}=\sqrt{9}=3$.

b) $I\left(\frac{2+4}{2}\ ;\ \frac{-1+0}{2}\ ;\ \frac{3+5}{2}\right)=\left(3\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ 4\right)$.

Corrigé de l'exercice 3.

a) On cherche k tel que $\vec{v}=k\,\vec{u}$: $-3=k\times 2$ donne $k=-\frac{3}{2}$. On vérifie : $-\frac{3}{2}\times 4=-6$ et $-\frac{3}{2}\times(-2)=3$. Les trois coordonnées concordent, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

b) Pour la première coordonnée, $2=k\times 1$ donne $k=2$; pour la deuxième, $4=2\times 2$ convient ; mais pour la troisième, $2\times 3=6\neq 5$. Aucun k ne convient pour les trois coordonnées : les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Corrigé de l'exercice 4.

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\times 3+2\times(-1)+(-1)\times 1=3-2-1=0$. Le produit scalaire est nul, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

b) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times 1+1\times(-2)+3\times 1=2-2+3=3\neq 0$: les vecteurs ne sont pas orthogonaux.

c) $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\times 3+t\times(-1)+2\times 1=5-t$. Ils sont orthogonaux lorsque $5-t=0$, soit $t=5$.

Corrigé de l'exercice 5.

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-2\\1-1\\2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-2\\3-1\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times(-1)+0\times 2+2\times 1=-2+0+2=0$.

c) Le produit scalaire est nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux : le triangle ABC est **rectangle en** A.