Maîtriser les fractions

Une fiche d'exercices pour comprendre les fractions comme nombres, les comparer et les calculer

① Pourquoi cette fiche ?

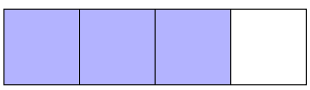
Une fraction comme $\frac{3}{4}$ n'est pas l'écriture de deux nombres entiers côte à côte : c'est un nombre, à part entière, qui peut être interprété de plusieurs façons. Il désigne une part d'un tout, un quotient, une mesure, un rapport. Le confondre avec une paire d'entiers conduit à des erreurs persistantes, par exemple à écrire $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ en additionnant numérateurs et dénominateurs séparément.

Cette fiche aborde les fractions sous deux angles. D'abord, le **sens du nombre fractionnaire** : comprendre les multiples interprétations, situer une fraction sur une droite graduée, comparer deux fractions, reconnaître des écritures équivalentes, ne pas perdre de vue l'unité de référence. Ensuite, la **maîtrise des opérations** : addition, soustraction, multiplication et division, en démasquant les erreurs classiques.

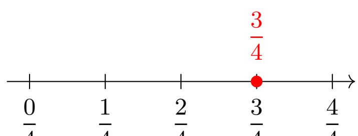
② Les multiples sens d'une fraction

Remarque 1 (Plusieurs façons de comprendre une fraction). Une fraction $\frac{a}{b}$ peut être interprétée de plusieurs manières, toutes correctes et complémentaires.

- **Partage :** $\frac{3}{4}$ représente 3 parts d'un tout partagé en 4 parts égales.
- **Quotient :** $\frac{3}{4}$ est le résultat de la division $3 \div 4$, c'est-à-dire $0{,}75$.
- **Mesure :** $\frac{3}{4}$ est le nombre qui, multiplié par 4, donne 3. C'est aussi la longueur obtenue en reportant 3 fois l'unité $\frac{1}{4}$.
- **Rapport :** $\frac{3}{4}$ peut décrire la proportion d'éléments d'un type par rapport au total (3 filles sur 4 élèves).



Aire : $\frac{3}{4}$ d'un rectangle



Position sur la droite graduée

Exercice 1 *Lire une fraction dans plusieurs sens* Pour chaque situation, écrire la fraction correspondante et préciser le sens dans lequel elle est interprétée (partage, quotient, mesure ou rapport).

a) Une tablette de chocolat est partagée en 8 carrés égaux. On en mange 5. Quelle fraction de la tablette a été mangée ?
b) On partage équitablement 3 pizzas entre 4 personnes. Quelle quantité de pizza reçoit chaque personne ?
c) Sur une carte, 1 cm représente 25 km. Quel est le rapport entre les distances sur la carte et dans la réalité ?
d) Une bouteille de 2 L est remplie aux trois quarts. Quel volume contient-elle ?

Exercice 2 *Représenter une fraction de plusieurs façons* Pour la fraction $\frac{2}{5}$:

a) Représenter $\frac{2}{5}$ par une part d'aire (rectangle ou disque partagé en parts égales).

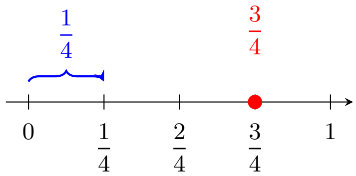
b) Représenter $\frac{2}{5}$ comme une longueur sur une droite graduée allant de 0 à 1.

c) Donner l'écriture décimale de $\frac{2}{5}$ (sens du quotient).

d) Donner un exemple de situation où $\frac{2}{5}$ joue le rôle de rapport.

3 La fraction sur la droite graduée

Remarque 2 (Une fraction est un nombre, donc elle a une place). Tout nombre, qu'il soit entier ou fractionnaire, possède une place sur la droite graduée. Pour placer $\frac{a}{b}$, on partage l'unité $[0\,;\,1]$ en b parts égales : la fraction $\frac{a}{b}$ est le point obtenu en reportant a de ces parts à partir de 0. Cette construction met en évidence que $\frac{a}{b}$ est « a fois $\frac{1}{b}$ ». L'unité fractionnaire $\frac{1}{b}$ est donc l'élément qu'on itère pour construire la fraction.



Exercice 3 *Placer des fractions sur la droite* Sur une droite graduée allant de 0 à 1, indiquer la place des fractions suivantes en précisant en combien de parts on partage l'unité.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{5}{8}$

e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{7}{10}$

Exercice 4 *Itération de l'unité fractionnaire*

a) Écrire $\frac{5}{6}$ comme une somme de fractions toutes égales à $\frac{1}{6}$.

b) Écrire $\frac{7}{4}$ comme une somme de fractions toutes égales à $\frac{1}{4}$, puis comme la somme d'un entier et d'une fraction strictement inférieure à 1.

c) Construire la fraction $\frac{11}{8}$ en reportant l'unité fractionnaire sur une droite graduée. La fraction est-elle inférieure ou supérieure à 1 ? À 2 ?

④ Comparer avant de calculer

Remarque 3 (Le piège « plus le dénominateur est grand, plus la fraction est grande »). Avec les entiers, plus le nombre est grand, plus il est grand : $7 > 5$. Avec les fractions, l'intuition s'inverse souvent : $\frac{1}{7} < \frac{1}{5}$, parce que partager en 7 parts donne des parts plus petites que partager en 5. Cette inversion est l'un des pièges les plus fréquents. Pour comparer correctement deux fractions, plusieurs stratégies coexistent.

- **Même dénominateur :** si $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ ont le même dénominateur, alors la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.
- **Même numérateur :** si $\frac{a}{b}$ et $\frac{a}{c}$ ont le même numérateur, alors la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur.
- **Comparer à un repère :** comparer chaque fraction à $\frac{1}{2}$ ou à 1 pour situer rapidement.
- **Réduire au même dénominateur :** dernière ressource, à utiliser quand les autres méthodes ne suffisent pas.

Exercice 5 *Vrai ou faux* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

a) $\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$

b) $\frac{3}{5} < \frac{3}{8}$

c) $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$

d) $\frac{4}{5} < 1$

e) $\frac{7}{4} < 1$

f) $\frac{5}{8} > \frac{1}{2}$

Exercice 6 *Ranger dans l'ordre croissant* Ranger les fractions suivantes dans l'ordre croissant.

a) $\frac{3}{5}\,;\,\frac{2}{5}\,;\,\frac{4}{5}\,;\,\frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{5}$

c) $\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{4}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{5}{6}$

⑤ Fractions équivalentes

Remarque 4 (Plusieurs écritures pour un même nombre). Un même nombre peut s'écrire de différentes façons sous forme de fraction. Par exemple :

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{50}{100} = 0{,}5.$$

On dit que ces fractions sont **équivalentes**.
Règle fondamentale. Multiplier (ou diviser) le numérateur **et** le dénominateur d'une fraction par un même nombre non nul donne une fraction équivalente :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \quad \text{pour tout } k \neq 0.$$

Une fraction est dite **irréductible** lorsqu'on ne peut plus simplifier (numérateur et dénominateur n'ont plus de diviseur commun autre que 1).

Exercice 7 *Trouver des fractions équivalentes* Compléter les égalités suivantes.

a) $\dfrac{2}{3} = \dfrac{?}{12} = \dfrac{?}{30}$
b) $\dfrac{5}{8} = \dfrac{?}{40} = \dfrac{15}{?}$
c) $\dfrac{?}{7} = \dfrac{6}{21} = \dfrac{?}{49}$

Exercice 8 *Simplifier jusqu'à l'irréductible* Simplifier chacune des fractions suivantes jusqu'à obtenir une fraction irréductible.

a) $\dfrac{6}{8}$ b) $\dfrac{15}{25}$ c) $\dfrac{18}{24}$
d) $\dfrac{36}{48}$ e) $\dfrac{42}{56}$ f) $\dfrac{100}{75}$

Exercice 9 *Reconnaître des fractions équivalentes* Parmi les fractions suivantes, regrouper celles qui sont équivalentes entre elles :

$$\frac{2}{3}\ ;\ \frac{6}{9}\ ;\ \frac{3}{4}\ ;\ \frac{8}{12}\ ;\ \frac{9}{12}\ ;\ \frac{15}{20}.$$

6 La question de l'unité de référence

Remarque 5 (Une fraction n'a de sens que rapportée à un tout). Une fraction sans précision sur le tout auquel elle se rapporte est ambiguë. $\frac{1}{2}$ d'une petite pizza n'est pas la même quantité que $\frac{1}{2}$ d'une grande pizza. Lorsqu'on compare deux fractions issues de situations différentes, il faut s'assurer que l'unité de référence est la même.
Quand l'unité change, l'ordre des fractions peut changer aussi. Une grande pizza coupée en 4 peut donner des parts plus grosses qu'une petite pizza coupée en 3, alors même que $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ en tant que nombres.

Exercice 10 *Repérer l'unité de référence* Pour chaque situation, indiquer si la comparaison est légitime ou non. Justifier.

a) Léa a mangé $\frac{1}{2}$ d'une tablette de chocolat de 200 g, et Karim a mangé $\frac{3}{4}$ d'une tablette de chocolat de 200 g. Qui a mangé le plus ?
b) Léa a mangé $\frac{1}{2}$ d'une tablette de 300 g, et Karim a mangé $\frac{3}{4}$ d'une tablette de 100 g. Qui a mangé le plus ?
c) Dans la classe A, $\frac{2}{5}$ des élèves portent des lunettes. Dans la classe B, $\frac{3}{8}$ portent des lunettes. Peut-on dire que la classe A a plus de porteurs de lunettes ?

7 Additionner et soustraire des fractions

Remarque 6 (L'erreur à éviter). L'erreur la plus tenace en calcul fractionnaire consiste à additionner numérateurs et dénominateurs séparément :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \quad \text{(faux).}$$

Ce raisonnement traite la fraction comme deux entiers indépendants, alors qu'elle représente un nombre unique. On peut s'en convaincre en visualisant : $\frac{1}{2}$, c'est déjà la moitié, et l'on ajoute encore quelque chose. Le résultat ne peut pas être plus petit que $\frac{1}{2}$. Or, $\frac{2}{5} < \frac{1}{2}$: l'erreur produit un résultat manifestement absurde.
Règle correcte. Pour additionner ou soustraire deux fractions, on les écrit avec un **même dénominateur**, puis on additionne (ou soustrait) les numérateurs en gardant le dénominateur commun.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}.$$

Exercice 11 *Démasquer l'erreur* Voici trois calculs effectués par un élève. Pour chacun, dire si le résultat est correct. S'il est incorrect, identifier l'erreur, expliquer pourquoi le résultat est absurde, et donner le calcul juste.

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$
b) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{8}$
c) $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

Exercice 12 *Calculer en réduisant au même dénominateur* Effectuer chacun des calculs suivants, en donnant le résultat sous forme irréductible.

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$
b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$
c) $\frac{3}{5} - \frac{1}{10}$
d) $\frac{5}{6} - \frac{2}{3}$
e) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$
f) $\frac{7}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$

8 Multiplier des fractions

Remarque 7 (Multiplication : numérateurs entre eux, dénominateurs entre eux). Pour multiplier deux fractions, on multiplie numérateurs entre eux et dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

Avant de calculer, il est souvent utile de **simplifier en croix** si possible, pour éviter d'avoir à simplifier de gros nombres en fin de calcul.
Attention : contrairement à l'addition, la règle de la multiplication ne demande pas de dénominateur commun. C'est précisément cette différence qui conduit certains élèves à appliquer cette règle (apparemment plus simple) à l'addition, par confusion. Il faut bien distinguer les contextes.

Exercice 13 *Multiplier deux fractions* Effectuer chacun des produits suivants, en donnant le résultat sous forme irréductible.

a) $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$
b) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{9}$
c) $\frac{5}{6} \times \frac{3}{10}$
d) $\frac{7}{8} \times \frac{4}{21}$
e) $\frac{2}{5} \times 15$
f) $\frac{3}{4} \times \frac{8}{9}$

Exercice 14 *Confronter addition et multiplication* Pour chaque ligne, effectuer les deux calculs et comparer les résultats.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$.

b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$.

Que peut-on en conclure sur l'effet de la multiplication par une fraction inférieure à 1 ?

9 Diviser des fractions

Remarque 8 (Diviser, c'est multiplier par l'inverse). L'**inverse** d'une fraction $\frac{a}{b}$ (avec $a \neq 0$) est la fraction $\frac{b}{a}$. Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}.$$

Cas particulier : diviser par un entier n revient à multiplier par $\frac{1}{n}$.

$$\frac{3}{5} \div 2 = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}.$$

Exercice 15 *Donner l'inverse* Donner l'inverse de chacune des fractions ou nombres suivants.

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{4}$ c) 7 d) $\frac{1}{6}$

e) $\frac{9}{10}$ f) $\frac{1}{2}$

Exercice 16 *Diviser* Effectuer chacun des quotients suivants, en donnant le résultat sous forme irréductible.

a) $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$ b) $\frac{5}{8} \div \frac{15}{16}$ c) $\frac{3}{7} \div 6$

d) $4 \div \frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ f) $\frac{9}{10} \div \frac{3}{5}$

10 Pour s'auto-évaluer

Remarque 9 (Cinq questions à se poser). Avant de manipuler une fraction, prendre l'habitude de se poser ces cinq questions.

- À quel sens fait-on appel ici : partage, quotient, mesure, rapport ?
- Quelle est l'unité de référence ? Est-elle la même pour les fractions que je compare ?
- Suis-je en train de transposer une intuition héritée des entiers (« plus le dénominateur est grand, plus la fraction est grande ») à un contexte où elle ne tient plus ?
- Pour additionner ou soustraire, ai-je bien réduit au même dénominateur ? Suis-je en train d'additionner numérateurs et dénominateurs séparément ?
- Mon résultat est-il vraisemblable ? Multiplier par une fraction inférieure à 1 diminue, additionner deux fractions positives augmente.