Maîtriser les fonctions

Une fiche d'exercices pour comprendre la fonction comme objet, articuler les registres et lire les graphiques

① Pourquoi cette fiche ?

La notion de fonction est l'un des objets les plus puissants des mathématiques, mais aussi l'un des plus délicats à conceptualiser. Une fonction n'est pas seulement une formule de calcul : c'est un objet mathématique à part entière, qu'on peut manipuler, comparer, transformer. Elle peut être donnée par un **tableau de valeurs**, une **formule algébrique**, une **représentation graphique** ou une **description verbale** d'une situation. Ces quatre points de vue désignent le même objet et doivent rester articulés.

Cette fiche aborde les fonctions en partant des confusions les plus fréquentes : on traitera la variable muette (la lettre dans $f(x)$ n'est qu'un emplacement), la distinction entre image et antécédent, l'opposition entre variation (la fonction augmente) et valeur (la fonction est positive), et la circulation entre les trois registres de représentation.

② Ce qu'est une fonction

Remarque 1 (Une fonction associe à chaque entrée une seule sortie). Une fonction f d'un ensemble de **départ** vers un ensemble d'**arrivée** associe à chaque élément x du départ **un seul** élément, noté $f(x)$, de l'arrivée. On dit que $f(x)$ est l'**image** de x par f, et que x est un **antécédent** de $f(x)$.
Trois points clés.

- Chaque entrée x a une et une seule image $f(x)$.
- Une même image peut avoir plusieurs antécédents (par exemple, $f(x) = x^2$ a deux antécédents pour 9 : 3 et -3).
- L'image dépend uniquement de la valeur de x, jamais de la lettre utilisée pour la noter.

Exercice 1 *Fonction ou pas fonction ?* Pour chacune des correspondances suivantes, dire si elle définit une fonction. Si non, expliquer pourquoi.

a) À chaque élève d'une classe, on associe sa date de naissance.
b) À chaque date de naissance, on associe les élèves nés ce jour-là.
c) À chaque nombre réel x, on associe $x^2 + 1$.
d) À chaque nombre réel positif, on associe les deux nombres dont il est le carré.

③ Les trois registres de représentation

Remarque 2 (Numérique, algébrique, graphique). Une même fonction peut être représentée de trois façons complémentaires.

- **Registre numérique :** un tableau de valeurs associant à des entrées x leurs images $f(x)$.
- **Registre algébrique :** une formule comme $f(x) = 2x + 3$, qui permet de calculer l'image de n'importe quel x.
- **Registre graphique :** une courbe dans un repère, où chaque point est de coordonnées $(x\,;\,f(x))$.

Maîtriser une fonction, c'est savoir circuler entre ces registres : passer du tableau à la formule, de la formule au graphique, du graphique à la lecture numérique. Chaque registre éclaire un aspect particulier que les autres laissent dans l'ombre.

Exercice 2 *Trois registres pour une même fonction* On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x + 1$.

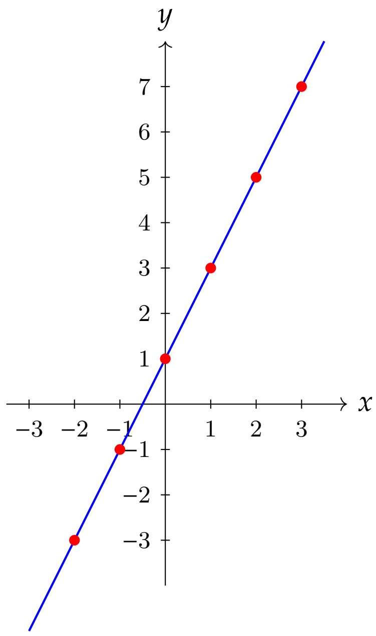
a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$						

b) Tracer la représentation graphique de f dans un repère, en plaçant les points du tableau.

c) À l'aide du graphique, lire l'image de 1,5 par f.

d) Vérifier ce résultat par le calcul algébrique.



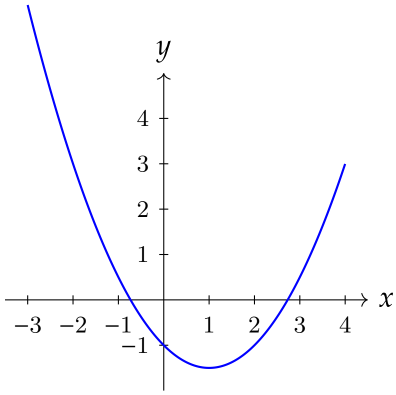
④ Image et antécédent : deux sens de lecture

Remarque 3 (Lire dans le bon sens). Une question de vocabulaire à ne jamais confondre.

- Calculer l'**image** d'un nombre a, c'est trouver $f(a)$. Sur le graphique, on part de a sur l'axe des abscisses, on monte jusqu'à la courbe, puis on lit l'ordonnée correspondante.
- Trouver les **antécédents** d'un nombre b, c'est trouver tous les x tels que $f(x) = b$. Sur le graphique, on part de b sur l'axe des ordonnées, on se déplace horizontalement jusqu'à rencontrer la courbe, puis on lit la (ou les) abscisse(s) correspondante(s).

L'image est unique ; les antécédents peuvent être multiples (ou inexistants). Lire un antécédent demande un sens de lecture inversé sur le graphique, ce qui est plus difficile que la lecture d'image.

Exercice 3 *Lectures graphiques* On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-3\,;\,4]$.



a) Lire $f(0)$, $f(2)$ et $f(-2)$.
b) Trouver les antécédents de -1 par f.
c) Trouver les antécédents de 0 par f.
d) Combien d'antécédents le nombre 4 admet-il par f ?

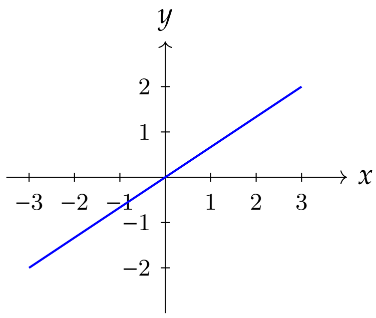
⑤ Variation et valeur : deux notions distinctes

Remarque 4 (Quand la fonction « monte » et quand elle est « positive »). Deux confusions à démêler.

- Dire qu'une fonction est **croissante** sur un intervalle, c'est dire que ses valeurs **augmentent** quand x augmente. Sur le graphique, la courbe monte de gauche à droite.
- Dire qu'une fonction est **positive** sur un intervalle, c'est dire que ses valeurs sont $\geqslant 0$. Sur le graphique, la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses.

Ces deux notions sont indépendantes : une fonction peut être croissante et négative, croissante et positive, décroissante et positive, etc.

Exercice 4 *Démêler variation et signe* On considère la fonction f représentée ci-dessous, définie sur $[-3\,;\,3]$.



a) La fonction est-elle croissante ou décroissante sur $[-3\,;\,3]$?
b) Donner l'intervalle sur lequel la fonction est négative.
c) Donner l'intervalle sur lequel la fonction est positive.
d) Compléter : « Sur l'intervalle $[-3\,;\,0]$, la fonction est ... et ... ». Choisir parmi croissante, décroissante, positive, négative.

⑥ La variable muette

Remarque 5 (La lettre n'est qu'un emplacement). Lorsqu'on écrit $f(x) = 2x + 3$, la lettre x ne désigne pas un nombre particulier : elle joue le rôle d'**emplacement réservé** (en anglais « placeholder »). Si l'on remplace partout x par t, ou par n, ou par $\heartsuit$, on définit exactement la même fonction.

$$f(x) = 2x + 3 \quad ; \quad f(t) = 2t + 3 \quad ; \quad f(\heartsuit) = 2\heartsuit + 3.$$

Ce sont trois notations pour la même fonction, parce qu'elles définissent la même règle de calcul.
Le choix de la lettre est purement conventionnel. On utilise souvent x par habitude, t quand la variable représente un temps, n quand elle représente un entier. Mais la fonction reste la même.

Exercice 5 *Reconnaître une même fonction* Parmi les définitions suivantes, regrouper celles qui définissent la même fonction.

a) $f(x) = 3x - 1$
b) $g(t) = 3t - 1$
c) $h(n) = 3n + 1$
d) $k(\theta) = 3\theta - 1$
e) $\ell(x) = 1 - 3x$

Exercice 6 *Calculer dans une fonction* Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4$.

a) Calculer $f(3)$, $f(-2)$, $f(0)$.
b) Calculer $f(t)$ lorsque $t = 5$.
c) Combien vaut $f(a)$ pour $a = -1$?
d) En quoi le choix de la lettre (x, t, a) modifie-t-il la fonction ?

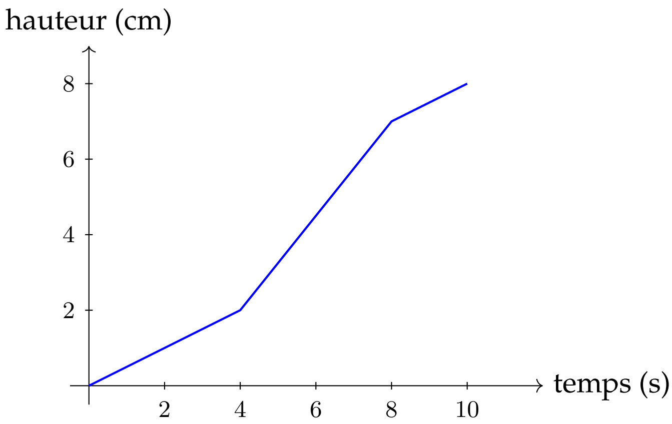
⑦ Co-variation : deux grandeurs qui varient ensemble

Remarque 6 (Penser la fonction comme un lien dynamique). Avant d'être une formule, une fonction est souvent un **lien entre deux grandeurs** qui varient ensemble. Quand l'une augmente, l'autre augmente, diminue, ou reste constante. Cette manière de penser, dite de **co-variation**, prépare la compréhension de la dépendance fonctionnelle.
Quelques exemples : la distance parcourue dépend du temps écoulé ; le prix d'une essence dépend du nombre de litres achetés ; la hauteur de l'eau dans une baignoire dépend de la durée du remplissage.

Exercice 7 *Identifier la grandeur d'entrée* Pour chaque situation, identifier les deux grandeurs en jeu, désigner celle qui dépend de l'autre, et écrire si possible la formule reliant les deux.

a) Un taxi facture 3 € de prise en charge et 2 € par kilomètre.
b) Un cycliste roule à vitesse constante de 25 km/h.
c) Le périmètre d'un carré dépend de la longueur de son côté.
d) L'aire d'un disque dépend de son rayon.

Exercice 8 *Lecture d'un graphique de co-variation* Le graphique ci-dessous représente la hauteur de l'eau (en cm) dans un récipient rempli régulièrement, en fonction du temps (en secondes).



a) Au bout de combien de secondes la hauteur atteint-elle 4 cm ?
b) Quelle est la hauteur de l'eau au bout de 6 secondes ?
c) Décrire la variation de la hauteur sur les trois phases visibles. Comment expliquer la forme du graphique en termes physiques (par exemple, le récipient n'est-il pas cylindrique) ?

8 Pour s'auto-évaluer

Remarque 7 (Cinq questions à se poser). Avant et pendant l'analyse d'une fonction, prendre l'habitude de se poser ces cinq questions.

- Cette correspondance est-elle bien une fonction (chaque entrée a-t-elle une seule image) ?
- Suis-je en train de calculer une image (entrée donnée, sortie cherchée) ou de chercher un antécédent (sortie donnée, entrée cherchée) ?
- La lettre que j'utilise pour la variable change-t-elle vraiment la fonction, ou n'est-elle qu'un nom ?
- Quand j'analyse le graphique, est-ce que je parle de variation (sens de la pente) ou de signe (position par rapport à l'axe des abscisses) ?
- Mes informations issues du graphique sont-elles cohérentes avec celles que je tirerais du tableau de valeurs ou de la formule ?