MATHÉMATIQUES

Maîtriser la fonction exponentielle

Une fiche d'exercices pour simplifier, résoudre, dériver et modéliser avec l'exponentielle

① POURQUOI CETTE FICHE ?

La fonction exponentielle décrit toutes les évolutions à vitesse proportionnelle à la quantité présente. Elle est toujours strictement positive et strictement croissante, et elle est égale à sa propre dérivée. La principale difficulté est de manipuler ses propriétés algébriques sans les confondre avec celles des puissances ordinaires, et de bien utiliser la stricte croissance pour résoudre équations et inéquations.

Cette fiche reprend chaque savoir-faire : simplifier une expression, résoudre une équation ou une inéquation, dériver, et modéliser un phénomène d'évolution.

② SIMPLIFIER AVEC LES PROPRIÉTÉS

Remarque 1 (Les propriétés algébriques). Pour tous réels a et b et tout entier n, on utilise les propriétés suivantes :

a) $\mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b}$

b) $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$

c) $\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$

d) $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$

Dans un produit ou un quotient, on additionne ou soustrait les exposants ; on ne les multiplie que pour une puissance : $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$.

Exercice 1 *Écrire sous la forme* e^k *ou* e^{kx}

a) $\mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^{3x}$

b) $\dfrac{\mathrm{e}^7}{\mathrm{e}^4}$

c) $(\mathrm{e}^x)^4$

d) $\dfrac{\mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^x}$

③ RÉSOUDRE DES ÉQUATIONS

Remarque 2 (Se ramener aux exposants). La fonction exponentielle est strictement croissante, donc $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \iff a = b$. On se ramène ainsi à une équation sur les exposants. Penser aussi à $1 = \mathrm{e}^0$.

Exercice 2 *Résoudre* Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $\mathrm{e}^{2x-1} = \mathrm{e}^{x+3}$

b) $\mathrm{e}^x = 1$

c) $e^{x^2} = e^{2x+3}$

④ RÉSOUDRE DES INÉQUATIONS

Remarque 3 (La croissance conserve le sens). Comme l'exponentielle est strictement croissante : $e^a < e^b \iff a < b$. On résout alors une inéquation du premier degré sur les exposants, sans changer le sens.

Exercice 3 *Résoudre* Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $e^x > 1$
b) $e^{2x} \leqslant e^6$
c) $e^{3x-1} > e^{x+5}$

⑤ SIGNE ET COMPARAISON

Remarque 4 (Toujours positive, toujours croissante). Pour tout réel x, $e^x > 0$: l'exponentielle ne s'annule jamais et ne change pas de signe. Et comme elle est strictement croissante, comparer deux exponentielles revient à comparer leurs exposants.

Exercice 4 *Signe et comparaison*

a) Justifier que l'équation $e^x = -2$ n'a aucune solution.
b) Résoudre $e^x \geqslant e^{-x}$.
c) Étudier le signe de $e^x - 1$ suivant les valeurs de x.

⑥ DÉRIVER

Remarque 5 (Dériver une exponentielle). La fonction exponentielle est égale à sa dérivée : $(e^x)' = e^x$. Plus généralement, $(e^{ax})' = a\,e^{ax}$. Pour un produit, on applique la formule $(uv)' = u'v + uv'$.

Exercice 5 *Calculer la dérivée*

a) $f(x) = e^x$
b) $g(x) = e^{2x}$
c) $h(x) = x\,e^x$
d) $k(x) = e^{-3x}$

⑦ UN PROBLÈME DE DÉCROISSANCE

Remarque 6 (Modéliser une évolution). Une quantité qui diminue à une vitesse proportionnelle à sa valeur se modélise par e^{-kt} (désintégration, refroidissement, élimination d'un médicament). Comme l'exposant $-kt$ décroît quand t augmente et que l'exponentielle est croissante, la quantité décroît.

Exercice 6 ***Désintégration*** La masse, en milligrammes, d'un échantillon radioactif est modélisée par $m(t) = 200\,\mathrm{e}^{-0,1t}$, où t est le temps en années.

a) Calculer la masse initiale $m(0)$.
b) Calculer $m(10)$ (arrondir au milligramme).
c) Expliquer pourquoi la masse est strictement décroissante.

8 POUR S'AUTO-ÉVALUER

Remarque 7 (Cinq questions à se poser). Avant et pendant un exercice sur l'exponentielle, prendre l'habitude de se poser ces cinq questions.

- Pour simplifier, est-ce que j'**additionne** les exposants (produit) ou les **soustrais** (quotient), sans jamais les multiplier ?
- Pour résoudre $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$, ai-je pensé à utiliser la stricte croissance pour passer à $a = b$? Et à écrire $1 = \mathrm{e}^0$ si besoin ?
- Ai-je en tête que e^x est **toujours strictement positif** (une équation $\mathrm{e}^x =$ nombre négatif n'a pas de solution) ?
- Pour dériver, ai-je utilisé $(\mathrm{e}^{ax})' = a\,\mathrm{e}^{ax}$, et la formule du produit si nécessaire ?
- Dans un problème, le signe de la constante k dans e^{kt} indique-t-il une croissance ($k > 0$) ou une décroissance ($k < 0$) ?

SOLUTIONS DES EXERCICES

Corrigé de l'exercice 1.

a) $e^{2x} \times e^{3x} = e^{2x+3x} = e^{5x}$.

b) $\dfrac{e^7}{e^4} = e^{7-4} = e^3$.

c) $(e^x)^4 = e^{4x}$.

d) $\dfrac{e^{-x} \times e^{3x}}{e^x} = \dfrac{e^{2x}}{e^x} = e^{2x-x} = e^x$.

Corrigé de l'exercice 2.

a) $e^{2x-1} = e^{x+3} \iff 2x - 1 = x + 3 \iff x = 4$.

b) $e^x = e^0 \iff x = 0$.

c) $e^{x^2} = e^{2x+3} \iff x^2 = 2x + 3 \iff x^2 - 2x - 3 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 4 + 12 = 16$, les racines sont -1 et 3. Donc $S = \{-1\ ;\ 3\}$.

Corrigé de l'exercice 3.

a) $e^x > e^0 \iff x > 0$. Solutions : $]0\ ;\ +\infty[$.

b) $e^{2x} \leqslant e^6 \iff 2x \leqslant 6 \iff x \leqslant 3$. Solutions : $]-\infty\ ;\ 3]$.

c) $e^{3x-1} > e^{x+5} \iff 3x - 1 > x + 5 \iff 2x > 6 \iff x > 3$. Solutions : $]3\ ;\ +\infty[$.

Corrigé de l'exercice 4.

a) Pour tout réel x, $e^x > 0$. Or $-2 < 0$, donc $e^x = -2$ est impossible : aucune solution.

b) $e^x \geqslant e^{-x} \iff x \geqslant -x \iff 2x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$. Solutions : $[0\ ;\ +\infty[$.

c) $e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$, et de même $e^x - 1 < 0 \iff x < 0$. Le signe de $e^x - 1$ se résume ainsi :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	

Corrigé de l'exercice 5.

a) $f'(x) = e^x$.

b) $g'(x) = 2\,e^{2x}$.

c) Produit avec $u = x$ et $v = e^x$, donc $u' = 1$ et $v' = e^x$: $h'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (1 + x)\,e^x$.

d) $k'(x) = -3\,e^{-3x}$.

Corrigé de l'exercice 6.

a) $m(0) = 200\,e^0 = 200 \times 1 = 200$ mg.

b) $m(10) = 200\,e^{-0{,}1\times10} = 200\,e^{-1} \approx 200 \times 0{,}3679 \approx 74$ mg.

c) Quand t augmente, l'exposant $-0{,}1\,t$ diminue ; or l'exponentielle est strictement croissante, donc $e^{-0{,}1t}$ diminue, et $m(t)$ aussi. La masse est donc strictement décroissante.