Maîtriser les équations

Une fiche d'exercices pour comprendre l'inconnue, le principe d'équivalence et la résolution

① Pourquoi cette fiche ?

Une équation n'est pas un calcul à effectuer : c'est une **question**. L'égalité $3x + 5 = 20$ ne se lit pas « $3x + 5$ font 20 », mais « pour quelle valeur de x a-t-on $3x + 5$ égal à 20 ? ». Cette différence de statut du signe « = » (relation entre deux expressions, et non instruction de calcul) est la première porte à franchir.

Cette fiche aborde la résolution des équations en partant de cette idée. Elle introduit progressivement le principe d'équivalence (« on fait la même chose des deux côtés »), montre les limites du modèle de la balance lorsque des coefficients négatifs apparaissent, et progresse dans le choix des nombres pour préparer chaque type de difficulté. Une attention particulière est portée à la **vérification** de la solution, qui permet de valider ou d'invalider chaque étape.

② Une équation, c'est une question

Remarque 1 (Différencier expression, égalité algébrique et équation). Trois objets, à ne pas confondre.

- Une **expression algébrique** comme $3x + 5$ est un nombre dépendant de x. Elle se calcule pour chaque valeur de x.
- Une **égalité algébrique** comme $2(x + 3) = 2x + 6$ est vraie pour *toutes* les valeurs de x. C'est une identité.
- Une **équation** comme $3x + 5 = 20$ est vraie seulement pour *certaines* valeurs de x. Résoudre l'équation, c'est trouver toutes les valeurs qui la rendent vraie. Ces valeurs sont appelées **solutions**.

Exercice 1 *Identifier la nature* Pour chacun des objets mathématiques suivants, indiquer s'il s'agit d'une expression, d'une égalité algébrique (vraie pour tout x) ou d'une équation (vraie pour certaines valeurs).

a) $4x - 7$
b) $4x - 7 = 5$
c) $4(x - 1) = 4x - 4$
d) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$
e) $2x + 3 = 11$
f) $\dfrac{3x}{2}$

③ Qu'est-ce qu'une solution ?

Remarque 2 (Vérifier par substitution). Un nombre a est solution d'une équation d'inconnue x s'il vérifie l'égalité lorsqu'on remplace x par a. La méthode pour le vérifier est immédiate : on substitue, on calcule séparément les deux membres, et l'on regarde s'ils donnent le même résultat.

Exercice 2 *Tester si un nombre est solution* Pour chaque équation, dire si le nombre proposé est solution. Justifier en calculant les deux membres séparément.

a) $3x + 5 = 20$; $x = 5$
b) $2x - 7 = 1$; $x = 4$
c) $4x + 3 = -5$; $x = -2$
d) $\frac{x}{3} + 1 = 4$; $x = 9$
e) $5x - 2 = 3x + 8$; $x = 5$

Exercice 3 *Trouver une solution par essais* Pour chaque équation, trouver une solution entière en testant des valeurs de x (essais successifs).

a) $x + 4 = 11$
b) $2x = 14$
c) $x - 5 = -2$
d) $3x - 1 = 8$

④ Le principe d'équivalence

Remarque 3 (Faire la même chose des deux côtés). Le **principe d'équivalence** est le c(oe)ur de la résolution des équations. Si l'on effectue la même opération sur les deux membres d'une équation, on obtient une nouvelle équation qui a exactement les mêmes solutions.
Les opérations autorisées sont les suivantes.

- Ajouter (ou soustraire) un même nombre aux deux membres.
- Multiplier (ou diviser) les deux membres par un même nombre **non nul**.

Image utile : on peut imaginer une balance équilibrée. Si l'on ajoute la même masse des deux côtés, l'équilibre est préservé. C'est cette même idée qui guide la résolution. Mais attention : cette image cesse d'être pertinente dès que des coefficients négatifs apparaissent, parce qu'on ne peut pas représenter une masse négative sur une balance. Dès lors, c'est le principe d'équivalence *abstrait* qui prend le relais.

Exercice 4 *Appliquer le principe* Pour chaque équation, indiquer quelle opération appliquer aux deux membres pour isoler x, puis donner la solution.

a) $x + 7 = 12$
b) $x - 4 = 9$
c) $5x = 35$
d) $\frac{x}{3} = 6$
e) $x + 11 = 4$
f) $-2x = 14$

⑤ Résoudre des équations à deux pas

Remarque 4 (Procéder dans l'ordre : addition, puis multiplication). Pour résoudre $ax + b = c$, on isole x en deux étapes.

1. On isole le terme contenant x en supprimant le terme indépendant ($-b$ aux deux membres).
2. On isole x en supprimant le coefficient ($\div a$ des deux membres).

Vérification systématique. Une fois la solution trouvée, on la substitue dans l'équation initiale pour s'assurer qu'elle donne bien une égalité vraie. Cette étape n'est pas optionnelle : elle protège des erreurs de signe ou de calcul.

Exercice 5 *Résoudre et vérifier* Résoudre chacune des équations suivantes en présentant les étapes (opérations effectuées des deux côtés) et en vérifiant la solution.

a) $3x + 5 = 20$
b) $2x - 7 = 9$
c) $5x + 12 = 27$
d) $4x - 3 = 17$
e) $7x + 2 = 30$

6 Équations à coefficients négatifs

Remarque 5 (Quand la balance ne suffit plus). Lorsque l'équation contient des coefficients négatifs, l'image de la balance perd sa pertinence (on ne peut pas mettre une « masse de -3 » dans un plateau). C'est alors le **principe d'équivalence abstrait** qui guide la résolution. Il fonctionne exactement de la même façon : on applique la même opération aux deux membres.
Une étape clé est la division par un nombre négatif, qui change le signe de chaque membre. Par exemple, dans $-3x = 12$, on divise les deux membres par -3 :

$$x = \frac{12}{-3} = -4.$$

La règle des signes s'applique normalement, comme en calcul numérique.

Exercice 6 *Résoudre avec coefficients négatifs* Résoudre chacune des équations suivantes, en vérifiant la solution.

a) $-3x = 12$
b) $-2x + 5 = 11$
c) $4 - x = 9$
d) $-5x - 3 = 7$
e) $8 - 2x = -4$

7 Équations à coefficients fractionnaires

Remarque 6 (Multiplier pour éliminer le dénominateur). Lorsqu'une équation contient une fraction, l'astuce consiste à **multiplier les deux membres** par le dénominateur (ou par un dénominateur commun) afin d'obtenir une équation à coefficients entiers.

$$\frac{x}{3} + 2 = 5 \quad \xrightarrow{\times 3} \quad x + 6 = 15 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 9.$$

Exercice 7 *Résoudre avec une fraction* Résoudre chacune des équations suivantes en éliminant les dénominateurs.

a) $\dfrac{x}{4} = 7$
b) $\dfrac{x}{3} + 1 = 5$
c) $\dfrac{x}{2} - 4 = 3$

d) $\dfrac{2x}{5} = 6$

e) $\dfrac{x+1}{3} = 4$

8 Équations avec inconnue des deux côtés

Remarque 7 (Regrouper l'inconnue d'un côté). Lorsqu'une équation comporte l'inconnue dans les deux membres, comme $5x - 2 = 3x + 8$, l'objectif est de **regrouper les termes en x d'un côté** (généralement à gauche) et les nombres de l'autre. On applique pour cela le principe d'équivalence : on retranche aux deux membres le terme contenant x qui se trouve à droite.

$$5x - 2 = 3x + 8 \quad \xrightarrow{-3x} \quad 2x - 2 = 8 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x = 10 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 5.$$

Pièges fréquents.

- L'élève qui « change de côté, change de signe » sans réfléchir oublie souvent de l'appliquer aux deux côtés à la fois, ce qui produit des erreurs.
- Si le coefficient en x devient négatif après regroupement, il faut diviser par ce coefficient en respectant la règle des signes.

Exercice 8 *Résoudre une équation avec inconnue des deux côtés* Résoudre chacune des équations suivantes, en présentant les étapes et en vérifiant la solution.

a) $5x - 2 = 3x + 8$

b) $7x + 1 = 4x + 13$

c) $2x + 9 = 5x - 6$

d) $3x - 5 = 8x + 10$

e) $4(x - 1) = 2x + 6$

9 Mettre en équation un problème

Remarque 8 (Du problème à l'équation). Pour résoudre un problème par mise en équation, on procède en quatre étapes.

1. **Choisir l'inconnue** : on identifie la grandeur cherchée et on la note par une lettre.
2. **Traduire l'énoncé** : on exprime les autres grandeurs en fonction de cette inconnue.
3. **Écrire l'équation** : on traduit en égalité l'information clé du problème.
4. **Résoudre, vérifier, conclure** : on résout, on vérifie que la solution a un sens dans le contexte, et on rédige la conclusion.

Exercice 9 *Petits problèmes* Résoudre chacun des problèmes suivants en posant une équation.

a) Marc a 12 ans de plus que sa s(oe)ur. À eux deux, ils ont 30 ans. Quel âge a chacun ?

b) Le périmètre d'un rectangle est 40 cm. Sa longueur mesure 4 cm de plus que sa largeur. Donner les dimensions.

c) Un livre coûte 5 € de plus que le double du prix d'un cahier. Léa achète 1 livre et 3 cahiers et paie 32 €. Quel est le prix d'un cahier ?

10 Pour s'auto-évaluer

Remarque 9 (Cinq questions à se poser). Avant et pendant la résolution d'une équation, prendre l'habitude de se poser ces cinq questions.

- Suis-je face à une équation (à résoudre pour trouver les solutions) ou à une identité algébrique (vraie pour tout x) ?
- À chaque étape, quelle opération est-ce que j'applique ? L'ai-je bien appliquée **aux deux membres** de l'égalité ?
- Lorsque je divise par le coefficient de x, ai-je correctement géré son signe ?
- Ai-je vérifié ma solution en la substituant dans l'équation initiale ?
- Si l'équation vient d'un problème, la valeur trouvée a-t-elle un sens dans le contexte (positive si c'est une longueur, entière si c'est un effectif, etc.) ?