

Maîtriser les équations différentielles

Une fiche d'exercices pour vérifier, résoudre et modéliser avec les équations $y' = ay$ et $y' = ay + b$

Fiche de cours : Équations différentielles.

① POURQUOI CETTE FICHE ?

Les équations différentielles de terminale se résolvent avec deux formules seulement, et c'est précisément ce qui rend les erreurs si fréquentes : on applique la formule sans avoir mis l'équation sous la bonne forme, on oublie la constante, on prend b pour la solution constante, ou l'on calcule C comme si la constante d'équilibre n'existait pas.

Cette fiche isole chaque geste : vérifier qu'une fonction est solution, résoudre $y' = ay$ avec une condition initiale, démasquer les erreurs classiques, résoudre $y' = ay + b$ dans toutes ses écritures, exploiter une solution particulière, étudier une solution, puis modéliser deux situations concrètes, dont l'une fait intervenir le logarithme pour remonter le temps.

② VÉRIFIER

Remarque 1 (Deux calculs séparés). On calcule d'un côté $f'(x)$, de l'autre le membre de droite avec f à la place de y , et l'on compare. Ne jamais partir de l'égalité à démontrer.

Exercice 1 Solution ou pas ?

- a) $f(x) = 5e^{-2x}$ est-elle solution de $y' = -2y$?
- b) $g(x) = 2e^{3x} - 1$ est-elle solution de $y' = 3y + 3$?
- c) $h(x) = e^x + x + 1$ est-elle solution de $y' = y - x$?
- d) $k(x) = (x + 1)e^x$ est-elle solution de $y' = y + e^x$? de $y' = y + xe^x$?

③ RÉSOUDRE $y' = ay$

Remarque 2 (Isoler y' d'abord). Dans $2y' + y = 0$ ou $5y' = y$, le coefficient a n'apparaît qu'une fois l'équation écrite $y' = ay$. La condition initiale se traite en dernier, en remplaçant x par la valeur donnée dans Ce^{ax} .

Exercice 2 Quatre équations, quatre conditions Résoudre chaque équation sur $\mathbb{R}$, puis déterminer la solution vérifiant la condition donnée.

- a) $y' = -4y$ et $y(0) = 3$.
- b) $y' + 2y = 0$ et $y(1) = 2$.
- c) $5y' = y$ et $y(0) = -1$.

d) $3y' - 2y = 0$ et $y(3) = 5$.

④ DÉMASQUER LES ERREURS

Exercice 3 *Cinq raisonnements à corriger* Chaque raisonnement contient une erreur. La repérer et la corriger.

- a) « $y' = 4y$ a pour solution e^{4x} ; celle qui vérifie $y(0) = 3$ est donc $e^{4x} + 2$. »
- b) « Les solutions de $y' = -2y + 8$ sont les fonctions $C e^{-2x} + 8$. »
- c) « $y' = 3y - 6$ avec $y(0) = 4$: $y = C e^{3x} + 2$, donc $C = 4$. »
- d) « $2y' = 3y$, donc $a = 3$ et les solutions sont $C e^{3x}$. »
- e) « Toutes les solutions de $y' = 2y + 6$ tendent vers -3 en $+\infty$. »

⑤ RÉSOUDRE $y' = ay + b$

Exercice 4 *Quatre écritures différentes* Résoudre chaque équation avec sa condition initiale.

- a) $y' = 2y + 4$ et $y(0) = 1$.
- b) $y' + 2y = 8$ et $y(0) = 0$.
- c) $5y' = y - 10$ et $y(0) = 12$.
- d) $y' = -y + 3$ et $y(\ln 2) = 1$.

⑥ AVEC UNE SOLUTION PARTICULIÈRE

Remarque 3 (Le principe). Si φ est une solution particulière de $y' = ay + f(x)$, alors $y - \varphi$ est solution de $y' = ay$: les solutions sont les $C e^{ax} + \varphi(x)$.

Exercice 5 *Deux équations avec second membre*

- a) Vérifier que $\varphi(x) = e^x$ est solution de $(E_1) : y' = -y + 2e^x$. En déduire toutes les solutions de (E_1) , puis celle qui vérifie $y(0) = 3$.
- b) Vérifier que $\psi(x) = -x - 1$ est solution de $(E_2) : y' = y + x$. En déduire toutes les solutions de (E_2) , puis celle qui vérifie $y(0) = 0$.

⑦ ÉTUDIER UNE SOLUTION

Exercice 6 *Deux conditions initiales, deux destins* On considère l'équation $y' = 0,5y - 2$.

- a) Déterminer la solution f vérifiant $f(0) = 3$ et la solution g vérifiant $g(0) = 5$.
- b) Étudier le sens de variation de f et de g , puis leurs limites en $+\infty$.

c) Résoudre $f(x) = 0$.

d) Que se passe-t-il pour la solution vérifiant $y(0) = 4$? Expliquer pourquoi l'équilibre 4 est dit instable.

⑧ PROBLÈMES EN CONTEXTE

Exercice 7 Datation au carbone 14 Le nombre $N(t)$ de noyaux de carbone 14 dans un échantillon vérifie $N' = -\lambda N$, où $\lambda > 0$ est la constante de désintégration et t est en années. La demi-vie du carbone 14 est de 5730 ans : au bout de ce temps, la moitié des noyaux initiaux subsiste.

- Exprimer $N(t)$ en fonction de $N_0 = N(0)$ et de λ .
- Déterminer la valeur exacte de λ , puis une valeur approchée.
- Un échantillon ne contient plus que 25 % de son carbone 14 initial. Quel est son âge?
- Un autre en contient encore 60 %. Quel est son âge, à l'année près?

Exercice 8 Vitesse d'un parachutiste La vitesse $v(t)$ (en m/s) d'un parachutiste en chute, parachute ouvert, vérifie $v' = 10 - 0,5 v$ (t en secondes) : la gravité l'accélère, la résistance de l'air, proportionnelle à la vitesse, le freine.

- Résoudre l'équation avec $v(0) = 0$ (saut depuis un point fixe, parachute déjà ouvert).
- Déterminer la vitesse limite et le temps nécessaire pour atteindre 19 m/s.
- Le parachutiste ouvre en réalité son parachute alors qu'il tombe à 50 m/s. Résoudre l'équation avec $v(0) = 50$, décrire l'évolution de la vitesse et calculer le temps nécessaire pour descendre à 22 m/s.
- Que retrouve-t-on dans les deux situations?

⑨ POUR S'AUTO-ÉVALUER

Remarque 4 (Cinq questions à se poser).

- Ai-je mis l'équation sous la forme $y' = ay + b$ avant de lire a et b ?
- Ai-je écrit la solution constante $-\frac{b}{a}$, et non b ?
- Ma solution générale contient-elle bien une constante C qui **multiplie** l'exponentielle?
- Pour calculer C , ai-je tenu compte de la constante $-\frac{b}{a}$ dans $y(x_0)$?
- Ai-je vérifié ma solution en la dérivant et en la remplaçant dans l'équation?

SOLUTIONS DES EXERCICES

Corrigé de l'exercice 1.

- a) $f'(x) = -10e^{-2x}$ et $-2f(x) = -10e^{-2x}$: oui.
- b) $g'(x) = 6e^{3x}$ et $3g(x) + 3 = 6e^{3x} - 3 + 3 = 6e^{3x}$: oui.
- c) $h'(x) = e^x + 1$ et $h(x) - x = e^x + 1$: oui.
- d) $k'(x) = e^x + (x+1)e^x = k(x) + e^x$: solution de la première. Pour la seconde, il faudrait $k'(x) = k(x) + xe^x$, or $k'(x) - k(x) = e^x \neq xe^x$: non.

Corrigé de l'exercice 2.

- a) $y = Ce^{-4x}$; $C = 3$: $y = 3e^{-4x}$.
- b) $y' = -2y$, $y = Ce^{-2x}$; $y(1) = Ce^{-2} = 2$, $C = 2e^2$: $y = 2e^{2-2x}$.
- c) $y' = \frac{1}{5}y$, $y = Ce^{x/5}$; $C = -1$: $y = -e^{x/5}$.
- d) $y' = \frac{2}{3}y$, $y = Ce^{2x/3}$; $y(3) = Ce^2 = 5$, $C = 5e^{-2}$: $y = 5e^{2x/3-2}$.

Corrigé de l'exercice 3.

- a) Les solutions sont Ce^{4x} ; ajouter 2 ne donne pas une solution. Avec $y(0) = 3$: $C = 3$ et $y = 3e^{4x}$.
- b) La solution constante est $-\frac{b}{a} = -\frac{8}{-2} = 4$, pas 8 : solutions $Ce^{-2x} + 4$.
- c) $y(0) = C + 2 = 4$ donne $C = 2$, pas 4 : $y = 2e^{3x} + 2$.
- d) Il faut isoler y' : $y' = \frac{3}{2}y$, donc $a = \frac{3}{2}$ et les solutions sont $Ce^{3x/2}$.
- e) Avec $a = 2 > 0$, $e^{2x} \rightarrow +\infty$: seule la solution constante -3 reste en -3 ; les autres tendent vers $+\infty$ (si $C > 0$) ou $-\infty$ (si $C < 0$). La convergence vers l'équilibre n'a lieu que pour $a < 0$.

Corrigé de l'exercice 4.

- a) Constante $-\frac{4}{2} = -2$; $y = Ce^{2x} - 2$; $C - 2 = 1$, $C = 3$: $y = 3e^{2x} - 2$.
- b) $y' = -2y + 8$, constante 4; $y = Ce^{-2x} + 4$; $C + 4 = 0$: $y = 4 - 4e^{-2x}$.
- c) $y' = 0,2y - 2$, constante $\frac{2}{0,2} = 10$; $y = Ce^{0,2x} + 10$; $C + 10 = 12$: $y = 2e^{0,2x} + 10$.
- d) Constante 3; $y = Ce^{-x} + 3$; $y(\ln 2) = Ce^{-\ln 2} + 3 = \frac{C}{2} + 3 = 1$, $C = -4$: $y = 3 - 4e^{-x}$.

Corrigé de l'exercice 5.

- a) $\varphi'(x) = e^x$ et $-\varphi(x) + 2e^x = e^x$: solution. Solutions de (E_1) : $y = Ce^{-x} + e^x$. Avec $y(0) = C + 1 = 3$: $y = 2e^{-x} + e^x$.
- b) $\psi'(x) = -1$ et $\psi(x) + x = -1$: solution. Solutions de (E_2) : $y = Ce^x - x - 1$. Avec $y(0) = C - 1 = 0$: $y = e^x - x - 1$.
(On retrouve la fonction dont la positivité traduit l'inégalité $e^x \geq x + 1$.)

Corrigé de l'exercice 6.

- a) Constante $-\frac{-2}{0,5} = 4$; solutions $C e^{0,5x} + 4$. $f : C + 4 = 3, f(x) = 4 - e^{0,5x}$. $g : C = 1, g(x) = 4 + e^{0,5x}$.
- b) $f'(x) = -0,5 e^{0,5x} < 0 : f$ décroissante, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. $g'(x) = 0,5 e^{0,5x} > 0 : g$ croissante, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
- c) $4 - e^{0,5x} = 0 \iff e^{0,5x} = 4 \iff x = 2 \ln 4 = 4 \ln 2 \approx 2,77$.
- d) $C = 0$: la solution est la constante 4. Mais dès que la valeur initiale s'écarte de 4, même très peu, la solution s'en éloigne indéfiniment (car $a > 0$) : l'équilibre ne « rattrape » pas les solutions voisines, il est instable. Pour $a < 0$ ce serait l'inverse.

Corrigé de l'exercice 7.

- a) $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.
- b) $N(5730) = \frac{N_0}{2} \iff e^{-5730\lambda} = \frac{1}{2} \iff \lambda = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1,21 \times 10^{-4}$ par an.
- c) $e^{-\lambda t} = 0,25 = \frac{1}{4} \iff t = \frac{\ln 4}{\lambda} = \frac{2 \ln 2}{\ln 2} \times 5730 = 11\,460$ ans : deux demi-vies.
- d) $e^{-\lambda t} = 0,6 \iff t = -\frac{\ln 0,6}{\lambda} = \frac{5730 \ln(5/3)}{\ln 2} \approx 4\,223$ ans.

Corrigé de l'exercice 8.

- a) $v' = -0,5v + 10$, constante $\frac{10}{0,5} = 20$; $v(t) = C e^{-0,5t} + 20$ avec $C + 20 = 0 : v(t) = 20 - 20 e^{-0,5t}$.
- b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 20$ m/s : vitesse limite. $20 - 20 e^{-0,5t} = 19 \iff e^{-0,5t} = \frac{1}{20} \iff t = 2 \ln 20 \approx 6,0$ s.
- c) $C + 20 = 50, C = 30 : v(t) = 20 + 30 e^{-0,5t}$. $v'(t) = -15 e^{-0,5t} < 0$: la vitesse décroît de 50 vers 20 m/s.
 $30 e^{-0,5t} = 2 \iff t = 2 \ln 15 \approx 5,4$ s.
- d) La même vitesse limite 20 m/s, atteinte par valeurs inférieures dans le premier cas, supérieures dans le second : la valeur d'équilibre $-\frac{b}{a}$ ne dépend pas de la condition initiale, seul C en dépend.