MATHÉMATIQUES

Maîtriser la dérivation

Une fiche d'exercices pour dériver, déterminer une tangente et étudier les variations d'une fonction

1 POURQUOI CETTE FICHE ?

Dériver, c'est mesurer la vitesse de variation d'une fonction. Le nombre dérivé en un point est la pente de la tangente ; le signe de la dérivée donne les variations de la fonction. La plupart des erreurs viennent de l'application des formules, en particulier celle du produit et celle du quotient, et de la confusion entre étudier le signe de f et celui de f'.

Cette fiche reprend chaque savoir-faire séparément : dériver les fonctions usuelles et les polynômes, puis un produit, un quotient, déterminer une tangente, et enfin relier la dérivée aux variations. Détaille toujours la formule utilisée avant de remplacer.

2 DÉRIVER LES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE ET LES POLYNÔMES

Remarque 1 (Les formules de base). On dérive les fonctions usuelles avec les formules suivantes :

a) $(x^n)' = n\,x^{n-1}$

b) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

d) la dérivée d'une constante est 0

Pour un polynôme, on dérive terme à terme, et un coefficient constant se conserve : $(k\,u)' = k\,u'$.

Exercice 1 ***Dériver*** Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $f(x) = x^5$
b) $g(x) = 4x^3 - 2x^2 + 7x - 1$
c) $h(x) = 3\sqrt{x}$
d) $k(x) = -\dfrac{2}{x}$

3 DÉRIVER UN PRODUIT

Remarque 2 (La formule du produit). $(uv)' = u'v + uv'$. On identifie u et v, on calcule u' et v', on écrit la formule **en entier**, puis on remplace et on réduit. Ne jamais dériver « terme à terme » un produit.

Exercice 2 ***Dériver un produit*** Calculer la dérivée.

a) $f(x) = (3x - 2)(x + 5)$
b) $g(x) = (x^2 + 1)(2x - 3)$
c) $h(x) = (2x + 1)^2$

4 DÉRIVER UN QUOTIENT

Remarque 3 (La formule du quotient). $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, valable là où $v \neq 0$. Attention à l'ordre au numérateur : c'est $u'v$ **moins** uv', jamais l'inverse.

Exercice 3 *Dériver un quotient* Calculer la dérivée.

a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$
b) $g(x) = \frac{2x-1}{x+3}$
c) $h(x) = \frac{x^2}{x-1}$

5 DÉTERMINER UNE ÉQUATION DE TANGENTE

Remarque 4 (La formule de la tangente). La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. On calcule donc $f'(a)$ (le coefficient directeur) et $f(a)$ (l'ordonnée du point de contact), puis on remplace.

Exercice 4 *Équation de tangente* Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a indiqué.

a) $f(x) = x^2 - 3x$, en $a = 2$.
b) $f(x) = x^3$, en $a = 1$.

6 RELIER LA DÉRIVÉE AUX VARIATIONS

Remarque 5 (Du signe de f' aux variations de f). Sur un intervalle, f est croissante là où f' est positive, décroissante là où f' est négative. Pour étudier les variations : on dérive, on factorise f', on étudie son signe, puis on dresse le tableau de variations. On étudie bien le signe de f', et non celui de f.

Exercice 5 *Variations d'une fonction* On considère $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$.

a) Calculer $f'(x)$ et le factoriser.
b) Étudier le signe de $f'(x)$.
c) Dresser le tableau de variations de f et préciser ses extremums locaux.

7 UN PROBLÈME D'OPTIMISATION

Remarque 6 (Optimiser, c'est chercher un extremum). Pour rendre une grandeur maximale ou minimale, on l'exprime comme une fonction d'une variable, on dérive, et on cherche où la dérivée s'annule en changeant de signe. C'est l'application la plus utile de la dérivation.

Exercice 6 ***Aire maximale*** On dispose de 20 mètres de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire contre un mur (le mur forme l'un des côtés, le grillage les trois autres). On note x la largeur de l'enclos (les deux côtés perpendiculaires au mur).

a) Exprimer la longueur du côté parallèle au mur en fonction de x, puis l'aire $\mathrm{A}(x)$ de l'enclos.
b) Calculer $\mathrm{A}'(x)$ et déterminer la valeur de x qui rend l'aire maximale.
c) En déduire l'aire maximale.

8 POUR S'AUTO-ÉVALUER

Remarque 7 (Cinq questions à se poser). Avant et pendant un calcul de dérivée, prendre l'habitude de se poser ces cinq questions.

- Quelle est la structure de la fonction : somme, produit, ou quotient ? La formule à utiliser en dépend.
- Pour un produit ou un quotient, ai-je bien écrit la formule **en entier** avant de remplacer ?
- Pour un quotient, ai-je respecté l'ordre $u'v - uv'$ au numérateur, et mis v^2 au dénominateur ?
- Pour une tangente, ai-je distingué $f'(a)$ (la pente) et $f(a)$ (l'ordonnée du point) ?
- Pour des variations, est-ce bien le signe de f' (et non de f) que j'étudie ?

SOLUTIONS DES EXERCICES

Corrigé de l'exercice 1.

a) $f'(x) = 5x^4$.
b) $g'(x) = 12x^2 - 4x + 7$.
c) $h'(x) = 3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$.
d) $k'(x) = -2 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{2}{x^2}$.

Corrigé de l'exercice 2.

a) $u = 3x - 2, v = x + 5, u' = 3, v' = 1 : f'(x) = 3(x + 5) + (3x - 2) \times 1 = 3x + 15 + 3x - 2 = 6x + 13$.
b) $u = x^2 + 1, v = 2x - 3, u' = 2x, v' = 2 : g'(x) = 2x(2x - 3) + (x^2 + 1) \times 2 = 4x^2 - 6x + 2x^2 + 2 = 6x^2 - 6x + 2$.
c) $(2x + 1)^2 = (2x + 1)(2x + 1)$, avec $u = v = 2x + 1 : h'(x) = 2(2x + 1) + (2x + 1) \times 2 = 4(2x + 1) = 8x + 4$.

Corrigé de l'exercice 3.

a) $u = x, v = x + 1, u' = 1, v' = 1 : f'(x) = \dfrac{1 \times (x + 1) - x \times 1}{(x + 1)^2} = \dfrac{1}{(x + 1)^2}$.
b) $u = 2x - 1, v = x + 3, u' = 2, v' = 1 : g'(x) = \dfrac{2(x + 3) - (2x - 1) \times 1}{(x + 3)^2} = \dfrac{2x + 6 - 2x + 1}{(x + 3)^2} = \dfrac{7}{(x + 3)^2}$.
c) $u = x^2, v = x - 1, u' = 2x, v' = 1 : h'(x) = \dfrac{2x(x - 1) - x^2 \times 1}{(x - 1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x - x^2}{(x - 1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$.

Corrigé de l'exercice 4.

a) $f'(x) = 2x - 3$, donc $f'(2) = 1$; $f(2) = 4 - 6 = -2$. Tangente : $y = 1 \times (x - 2) + (-2) = x - 4$.
b) $f'(x) = 3x^2$, donc $f'(1) = 3$; $f(1) = 1$. Tangente : $y = 3(x - 1) + 1 = 3x - 2$.

Corrigé de l'exercice 5.

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x - 2)(x + 1)$.
b) Le trinôme $x^2 - x - 2$ a pour racines -1 et 2, et son coefficient dominant est positif : $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\ ;\ -1[$, $f'(x) < 0$ sur $]-1\ ;\ 2[$, $f'(x) > 0$ sur $]2\ ;\ +\infty[$.
c) Le signe de f' et le sens de variation de f se résument dans le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	8	↘	-19	↗	$+\infty$

La fonction f admet donc un maximum local égal à 8 en -1 (car $f(-1) = -2 - 3 + 12 + 1 = 8$) et un minimum local égal à -19 en 2 (car $f(2) = 16 - 12 - 24 + 1 = -19$).

Corrigé de l'exercice 6.

a) Le grillage couvre deux largeurs et une longueur : $2x$ + longueur $= 20$, donc la longueur est $20 - 2x$. L'aire est $\mathrm{A}(x) = x(20 - 2x) = 20x - 2x^2$ (avec $0 < x < 10$).

b) $\mathrm{A}'(x) = 20 - 4x$. $\mathrm{A}'(x) = 0 \iff x = 5$. Pour $x < 5$, $\mathrm{A}'(x) > 0$ (l'aire augmente) ; pour $x > 5$, $\mathrm{A}'(x) < 0$ (l'aire diminue) : $x = 5$ donne donc un maximum.

c) La longueur vaut alors $20 - 2 \times 5 = 10$ m, et l'aire maximale est $\mathrm{A}(5) = 5 \times 10 = 50\ \mathrm{m}^2$. Le tableau de variations de A sur $]0\ ;\ 10[$ confirme ce maximum :

x	0		5		10
$\mathrm{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathrm{A}(x)$	0	$\nearrow$	50	$\searrow$	0