

Maîtriser les nombres décimaux

Une fiche d'exercices pour comprendre la valeur de position, la densité et les opérations sur les décimaux

① POURQUOI CETTE FICHE ?

Les nombres décimaux étendent l'univers des nombres au-delà des entiers naturels. Cette extension paraît naturelle, mais elle s'accompagne de plusieurs pièges. Certaines règles familières des entiers (« plus un nombre a de chiffres, plus il est grand ») cessent d'être valables. La virgule, contrairement à ce que suggère son nom français, n'est pas un séparateur entre deux entiers : elle marque le passage des unités aux dixièmes, centièmes, millièmes. Et entre deux décimaux voisins, comme 1,5 et 1,6, il n'y a pas « rien », mais une infinité de nombres.

Cette fiche aborde les nombres décimaux sous deux angles indissociables. D'abord, le **sens du nombre** : comprendre la valeur de position des chiffres après la virgule, comparer correctement, intercaler, situer sur une droite graduée, faire le lien avec les fractions. Ensuite, la **maîtrise des opérations** : additions et soustractions avec virgules alignées, multiplications et divisions par 10, 100, 1000.

② COMPRENDRE LA VALEUR DE POSITION

Remarque 1 (Chaque chiffre a sa place). Dans un nombre décimal, chaque chiffre tient sa valeur de la place qu'il occupe.

- À gauche de la virgule : chiffre des unités, dizaines, centaines, etc.
- À droite de la virgule : chiffre des dixièmes, centièmes, millièmes, dix-millièmes, etc.

Ainsi, dans 3,124 :

- le 3 est le chiffre des unités ;
- le 1 est le chiffre des dixièmes : il vaut $\frac{1}{10} = 0,1$;
- le 2 est le chiffre des centièmes : il vaut $\frac{2}{100} = 0,02$;
- le 4 est le chiffre des millièmes : il vaut $\frac{4}{1000} = 0,004$.

On peut donc écrire $3,124 = 3 + 0,1 + 0,02 + 0,004$, ou encore $3,124 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{4}{1000}$.

Exercice 1 *Identifier la valeur de position* Pour chacun des nombres suivants, indiquer la valeur du chiffre 5.

- | | | |
|---------|----------|----------|
| a) 3,57 | b) 0,05 | c) 25,3 |
| d) 0,15 | e) 1,543 | f) 5 034 |

Exercice 2 *Décomposer un décimal* Décomposer chacun des nombres suivants comme une somme de termes du type chiffre \times valeur de position, en suivant le modèle :

$$3,124 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{4}{1000}.$$

- a) 7,38

- b) 0,506
- c) 12,04
- d) 1,0023

③ COMPARER DES NOMBRES DÉCIMAUX

Remarque 2 (Le piège du « plus de chiffres = plus grand »). Avec les entiers naturels, plus un nombre a de chiffres, plus il est grand : $124 > 7$. Avec les nombres décimaux, ce principe n'est plus valable à droite de la virgule.

Pour comparer deux décimaux, on procède en deux temps.

1. On compare d'abord les parties entières (à gauche de la virgule).
2. Si les parties entières sont égales, on compare chiffre à chiffre les parties décimales, en commençant par les dixièmes, puis les centièmes, etc. Une astuce sûre est de **compléter les deux nombres avec des zéros** afin qu'ils aient le même nombre de décimales.

Exemple : pour comparer 3,124 et 3,7, on écrit $3,7 = 3,700$ et l'on compare 3,124 et 3,700. Comme $3 = 3$ pour la partie entière, on regarde les dixièmes : $1 < 7$, donc $3,124 < 3,700$, c'est-à-dire $3,124 < 3,7$. Le nombre 3,124 a beaucoup de chiffres mais il est plus petit.

Exercice 3 *Vrai ou faux* Pour chacune des affirmations, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

- | | | |
|------------------|-----------------|-----------------|
| a) $3,124 > 3,7$ | b) $0,6 > 0,45$ | c) $2,9 < 2,11$ |
| d) $1,5 < 1,50$ | e) $7,08 < 7,1$ | f) $0,999 > 1$ |

Exercice 4 *Démasquer l'erreur* Voici la production d'un élève à qui l'on demande de ranger 1,5, 1,45, 1,312 et 1,9 dans l'ordre croissant.

« $1,5 < 1,9 < 1,45 < 1,312$, parce que $5 < 9 < 45 < 312$. »

- a) Identifier précisément l'erreur de raisonnement.
- b) Donner le rangement correct, en justifiant.

Exercice 5 *Ranger dans l'ordre croissant* Ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant.

- a) 0,3 ; 0,03 ; 0,33 ; 0,303 ; 0,033
- b) 5,1 ; 5,09 ; 5,11 ; 5,009 ; 5,19
- c) 0,9 ; 1 ; 0,99 ; 0,999 ; 1,01

④ DÉCIMAUX ET FRACTIONS

Remarque 3 (Tout décimal s'écrit comme une fraction). Tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.

$$0,7 = \frac{7}{10} \quad ; \quad 0,35 = \frac{35}{100} \quad ; \quad 0,042 = \frac{42}{1000}$$

Réciproquement, certaines fractions s'écrivent comme des nombres décimaux. Une fraction $\frac{a}{b}$ a une écriture décimale finie si et seulement si, après simplification, son dénominateur ne contient que des facteurs 2 et 5.

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0,75 \quad ; \quad \frac{1}{8} = \frac{125}{1000} = 0,125.$$

À l'inverse, $\frac{1}{3}$ n'a pas d'écriture décimale finie (son écriture est $0,333\dots$, illimitée).

Exercice 6 *Décimal vers fraction* Écrire chacun des nombres décimaux suivants sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10, puis donner la fraction simplifiée si possible.

- | | | |
|---------|----------|---------|
| a) 0,9 | b) 0,7 | c) 0,25 |
| d) 0,08 | e) 0,125 | f) 1,5 |

Exercice 7 *Fraction vers décimal* Pour chacune des fractions suivantes, déterminer si elle a une écriture décimale finie. Si oui, donner cette écriture ; sinon, expliquer pourquoi.

- | | | |
|------------------|------------------|-------------------|
| a) $\frac{3}{4}$ | b) $\frac{1}{5}$ | c) $\frac{1}{3}$ |
| d) $\frac{7}{8}$ | e) $\frac{2}{7}$ | f) $\frac{9}{20}$ |

⑤ LA DENSITÉ : INTERCALER ENTRE DEUX DÉCIMAUX

Remarque 4 (Entre deux décimaux, il y en a toujours d'autres). Avec les entiers naturels, après 5 vient 6, et il n'y a aucun entier entre les deux. Cette idée de « successeur » n'est plus valable pour les décimaux. Entre 1,5 et 1,6, il existe une **infinité** de décimaux : 1,51, 1,55, 1,59, 1,501, 1,5001, etc.

Pour intercaler un décimal entre deux décimaux donnés, une méthode efficace consiste à **ajouter une décimale supplémentaire** : on a alors la place pour insérer un nombre.

Exercice 8 *Trouver un décimal entre deux décimaux* Donner, dans chaque cas, un nombre décimal strictement compris entre les deux nombres proposés.

- Entre 3,1 et 3,2.
- Entre 0,7 et 0,8.
- Entre 3,14 et 3,15.
- Entre 0,9 et 1.
- Entre 5,99 et 6.
- Entre 0,001 et 0,002.

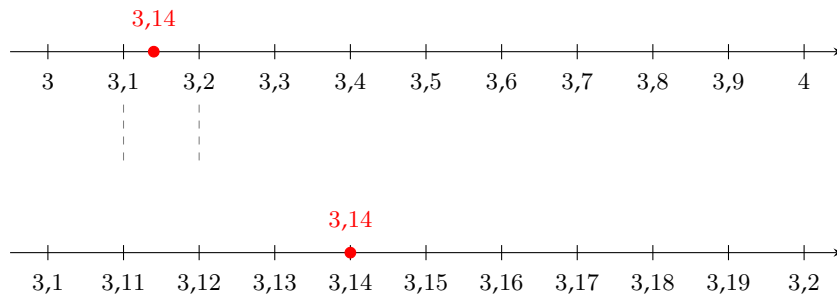
Exercice 9 *Intercaler trois décimaux distincts* Donner, pour chaque cas, trois nombres décimaux distincts strictement compris entre les deux nombres proposés.

- Entre 2 et 3.
- Entre 0,3 et 0,4.
- Entre 1,57 et 1,58.

Exercice 10 *Question de réflexion* Combien y a-t-il de nombres décimaux strictement compris entre 0,3 et 0,4 ? Justifier la réponse en proposant une méthode pour en construire autant que l'on veut.

⑥ VISUALISER SUR LA DROITE GRADUÉE

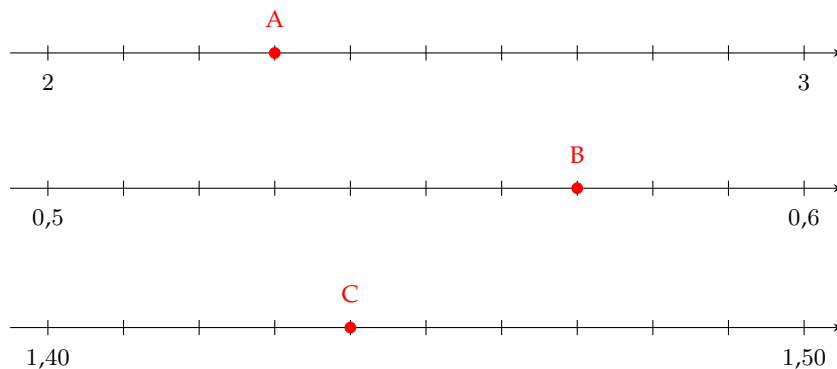
Remarque 5 (Zoomer sur un intervalle). Pour situer un décimal sur une droite graduée, on procède par zooms successifs. On encadre d'abord par deux entiers consécutifs, puis on zoome pour encadrer par deux dixièmes consécutifs, et ainsi de suite. Cette méthode rend visible la densité des décimaux.



Exercice 11 *Encadrer par zooms successifs* Pour chacun des nombres suivants, donner un encadrement par deux entiers consécutifs, puis un encadrement par deux dixièmes consécutifs, puis un encadrement par deux centièmes consécutifs (lorsque cela a un sens).

- 3,142
- 0,785
- 7,05

Exercice 12 *Lire des décimaux sur une droite graduée* Sur chaque droite graduée ci-dessous, lire la valeur du point repéré.



⑦ LE ZÉRO UTILE ET LE ZÉRO INUTILE

Remarque 6 (Tous les zéros ne se valent pas). Dans l'écriture d'un nombre décimal, certains zéros sont **indispensables** (ils marquent une valeur de position) et d'autres sont **inutiles** (ils peuvent être supprimés sans changer la valeur).

- Un zéro **en tête** (à gauche du chiffre des unités) est inutile : $03,5 = 3,5$.
- Un zéro **en queue** (à droite du dernier chiffre non nul après la virgule) est inutile : $3,50 = 3,5$.
- Un zéro **intercalé** (entre deux chiffres non nuls, ou marquant une valeur de position vide) est indispensable : $3,05 \neq 3,5$, $30,5 \neq 3,5$.

Cas particulier des mesures. En sciences, l'écriture 3,50 m peut signifier que la mesure est connue au centimètre près, alors que 3,5 m ne précise que le décimètre. Le zéro final n'a alors plus le même statut : il indique la précision de la mesure, et n'est plus simplement décoratif.

Exercice 13 *Supprimer les zéros inutiles* Pour chacun des nombres suivants, identifier les zéros inutiles et donner l'écriture la plus simple.

- a) 03,5 b) 3,50 c) 030,50
d) 0,0700 e) 1,0030 f) 00,05

Exercice 14 *Vrai ou faux* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

- a) $3,5 = 3,50 = 3,500$.
b) $0,3 = 0,03$.
c) $7,1 = 7,10$.
d) $20,5 = 2,5$.

⑧ ADDITIONS ET SOUSTRATIONS : ALIGNER LES VIRGULES

Remarque 7 (La virgule n'est pas un séparateur entre deux entiers). Une erreur classique consiste à traiter un nombre décimal comme deux entiers séparés par une virgule. Par exemple, un élève écrit :

$$3,7 + 2,5 = 5,12 \quad (\text{faux})$$

en faisant $3 + 2 = 5$ d'un côté de la virgule et $7 + 5 = 12$ de l'autre, sans transmettre la retenue. Or, 7 et 5 sont ici des dixièmes, et $7 + 5 = 12$ dixièmes, c'est-à-dire 1 unité et 2 dixièmes. La retenue franchit donc la virgule. Le calcul correct est :

$$3,7 + 2,5 = 6,2.$$

Pour éviter cette erreur, la règle est de **toujours aligner les virgules** lorsqu'on pose l'opération, en complétant si nécessaire avec des zéros pour avoir le même nombre de décimales.

Exercice 15 *Démasquer l'erreur* Voici trois calculs effectués par un élève. Pour chacun, dire si le résultat est correct. S'il est incorrect, identifier l'erreur et donner le résultat juste.

- a) $3,7 + 2,5 = 5,12$
b) $4,3 + 1,05 = 5,08$
c) $7,5 - 2,25 = 5,25$

Exercice 16 *Calculer en alignant les virgules* Effectuer chacun des calculs suivants en posant l'opération et en alignant soigneusement les virgules.

- a) $4,7 + 3,28$ b) $12,05 + 7,9$ c) $8,3 - 4,57$
d) $15 - 6,82$ e) $0,45 + 1,8 + 0,075$ f) $20,1 - 9,99$

9 MULTIPLIER ET DIVISER PAR 10, 100, 1000

Remarque 8 (La virgule se déplace). Multiplier un nombre décimal par 10, 100, 1000 revient à déplacer la virgule vers la **droite** de 1, 2, 3 rangs. Diviser par 10, 100, 1000 revient à déplacer la virgule vers la **gauche** de 1, 2, 3 rangs.

$$3,124 \times 10 = 31,24 \quad ; \quad 3,124 \times 100 = 312,4 \quad ; \quad 3,124 \div 100 = 0,03124.$$

Lorsqu'il manque des chiffres pour décaler la virgule, on complète avec des zéros.

$$0,7 \times 1000 = 700 \quad ; \quad 5 \div 100 = 0,05.$$

Erreur fréquente. L'élève qui pense que « multiplier par 10 revient à ajouter un zéro à droite » ne fait pas la différence entre $32 \times 10 = 320$ (correct, car le nombre est entier) et $3,2 \times 10 = 3,20$ (incorrect : le résultat correct est 32). La règle « ajouter un zéro » n'est qu'un cas particulier, valable uniquement pour les entiers.

Exercice 17 *Calculer mentalement* Calculer chacun des produits ou quotients suivants.

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|------------------------|---------------------|
| a) $3,124 \times 10$ | b) $3,124 \times 100$ | c) $3,124 \times 1000$ | d) $0,7 \times 100$ |
| e) $0,05 \times 1000$ | f) $52,3 \div 10$ | g) $7 \div 100$ | h) $0,9 \div 10$ |

Exercice 18 *Démasquer l'erreur* Voici trois calculs effectués par un élève. Pour chacun, dire si le résultat est correct. S'il est incorrect, identifier l'erreur et donner le résultat juste.

- a) $3,5 \times 10 = 3,50$
- b) $0,45 \times 100 = 0,4500$
- c) $25 \div 100 = 0,25$

10 POUR S'AUTO-ÉVALUER

Remarque 9 (Cinq questions à se poser). Avant de comparer, calculer ou interpréter un nombre décimal, prendre l'habitude de se poser ces cinq questions.

- Quelle est la valeur de position de chaque chiffre dans ce nombre ?
- Pour comparer deux décimaux, ai-je complété avec des zéros pour qu'ils aient le même nombre de décimales ?
- Suis-je en train de transposer la règle des entiers (« plus de chiffres = plus grand », « ajouter un zéro à droite pour multiplier par 10 ») à un contexte décimal où elle ne tient plus ?
- Pour additionner ou soustraire, ai-je aligné les virgules ?
- Quand je supprime ou ajoute un zéro, change-t-il ou non la valeur du nombre ?