Maîtriser le calcul littéral

Une fiche d'exercices pour comprendre la lettre comme nombre, le signe égal et les manipulations algébriques

1 Pourquoi cette fiche ?

Le passage du calcul numérique au calcul littéral est l'un des moments les plus délicats du collège. Une lettre comme a ou x n'est ni l'abréviation d'un mot, ni le nom d'un objet : c'est un nombre, dont on ne précise pas la valeur. L'écriture $3a$ ne désigne pas non plus la juxtaposition des chiffres 3 et a : c'est le produit $3 \times a$. Quant au signe « = », il ne signifie pas « donne le résultat » comme en arithmétique, mais traduit une relation d'**équivalence** entre deux expressions qui désignent le même nombre.

Cette fiche aborde le calcul littéral en partant de ces malentendus pour les démasquer. Elle est organisée autour de cinq idées-forces : la lettre est un nombre, le signe égal est une relation, la substitution donne du sens à la lettre, certaines expressions sont déjà sous leur forme la plus simple, et la distributivité a une interprétation géométrique.

2 La lettre est un nombre

Remarque 1 (Ce qu'une lettre désigne, et ce qu'elle ne désigne pas). Dans une expression algébrique, une lettre désigne toujours un **nombre** dont on ne précise pas la valeur (ou qui peut prendre plusieurs valeurs). Trois confusions à éviter.

- **La lettre n'est pas une abréviation :** dans « $3a$ », la lettre a ne signifie pas « abricot » ni « animal ». C'est un nombre.
- **La lettre n'est pas une étiquette d'objet :** si l'on note p le prix d'un crayon, la lettre p représente le nombre d'euros, pas le crayon lui-même. Écrire « $5p$ » ne signifie pas « 5 crayons », mais « 5 fois le prix d'un crayon ».
- **« $3a$ » n'est pas la concaténation des chiffres 3 et a :** si a vaut 1, alors $3a$ vaut 3 (et non 31). L'écriture $3a$ est un **produit :** $3a = 3 \times a$.

Exercice 1 *Décoder une écriture algébrique* Pour chacune des écritures suivantes, donner sa signification en toutes lettres (sous forme d'une opération entre nombres).

a) $5x$ b) $\dfrac{a}{2}$ c) $a + b$

d) $2x + 3$ e) x^2 f) $-3a$

Exercice 2 *Démasquer la concaténation* Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

a) Si $a = 1$, alors $3a = 31$.
b) Si $a = 5$, alors $2a = 25$.
c) Si $x = 0$, alors $7x = 0$.
d) Si $b = 1$, alors $b + b = 11$.

Exercice 3 *Lettre-objet ou lettre-nombre ?* Léa lit l'énoncé suivant : « p désigne le prix d'un crayon en euros. Écrire le prix de 5 crayons en fonction de p. » Elle écrit : « 5 crayons coûtent $5p$ euros, donc p vaut 5 crayons ».

a) Identifier la confusion commise par Léa.
b) Écrire correctement ce que représente p, et ce que représente $5p$.

3 Le signe égal : opérateur ou relation ?

Remarque 2 (Deux conceptions du signe « = »). En arithmétique, on utilise souvent le signe = pour signifier « donne le résultat » : $3 + 5 = 8$. Mais cette conception est trop pauvre pour le calcul littéral.
En algèbre, le signe = exprime une **équivalence** : deux expressions désignent le même nombre, quelles que soient les valeurs des lettres. L'égalité fonctionne alors dans les deux sens.

$$2(x + 3) = 2x + 6.$$

Cette égalité signifie que les deux expressions sont strictement équivalentes : pour toute valeur de x, elles donnent le même nombre. On peut donc écrire $2x + 6 = 2(x + 3)$ tout aussi bien.
Conséquence pratique. Une expression peut figurer indifféremment à gauche ou à droite du signe =, et l'égalité $3 + 5 = ? + 2$ a un sens (avec $? = 6$) parce que « = » exprime « de chaque côté, on a la même quantité », pas « à gauche, on attend le résultat à droite ».

Exercice 4 *Compléter pour rendre l'égalité vraie* Compléter les égalités suivantes par un nombre qui les rend vraies.

a) $3 + 5 = ? + 2$
b) $7 - 4 = 1 + ?$
c) $? \times 4 = 12$
d) $9 + ? = 4 + 8$
e) $? + ? = 10$ (deux nombres égaux)
f) $2 \times 5 = ? - 3$

Exercice 5 *Vrai ou faux sur des égalités algébriques* Pour chacune des égalités suivantes, dire si elle est vraie pour toute valeur de la lettre, ou seulement pour certaines valeurs (à préciser).

a) $2(x + 3) = 2x + 6$
b) $x + 5 = 12$
c) $x + x = 2x$
d) $3x = 9$
e) $x \times 0 = 0$
f) $x + 1 = x$

4 Substitution : la lettre prend une valeur

Remarque 3 (Donner du sens à la lettre en la remplaçant par un nombre). La meilleure façon de comprendre une expression algébrique est de **substituer** la lettre par différentes valeurs et d'observer le résultat. Cette pratique a deux vertus.

- Elle ancre la lettre comme nombre, et non comme symbole abstrait.
- Elle permet de **vérifier** une égalité algébrique : si l'égalité est vraie, elle l'est pour n'importe quelle valeur testée. Si l'on trouve une valeur pour laquelle l'égalité est fausse, alors l'égalité est globalement fausse.

Exercice 6 *Calculer une expression pour plusieurs valeurs* Soit $A = 3x + 2$. Calculer la valeur de A pour les valeurs de x suivantes.

a) $x = 0$
b) $x = 1$
c) $x = 2$
d) $x = -1$
e) $x = 5$
f) $x = \frac{1}{2}$

Exercice 7 *Vérifier une égalité par substitution* Pour chacune des égalités suivantes, vérifier si elle est vraie en testant deux valeurs distinctes de x (par exemple $x = 0$ et $x = 1$). Si l'égalité est fausse pour au moins une valeur, conclure qu'elle est fausse.

a) $2(x + 5) = 2x + 10$
b) $(x + 1)^2 = x^2 + 1$
c) $3x + 2x = 5x$
d) $4x - x = 4$
e) $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$

5 Programmes de calcul : généraliser une procédure

Remarque 4 (De l'exemple à la formule). Un **programme de calcul** est une suite d'instructions appliquée à un nombre de départ. En testant le programme sur plusieurs nombres, on peut conjecturer un résultat général. Pour le **prouver**, on remplace le nombre de départ par une lettre et l'on déroule le programme algébriquement.

Exercice 8 *Conjecturer puis prouver* On considère le programme de calcul suivant.

- Choisir un nombre.
- Lui ajouter 5.
- Multiplier le résultat par 2.
- Soustraire 10.
- Diviser le résultat par 2.

a) Tester le programme avec les nombres 3, 7 et -1. Que remarque-t-on ?
b) Conjecturer ce que fait ce programme.
c) Prouver la conjecture en remplaçant le nombre de départ par x et en déroulant le calcul.

Exercice 9 *Prouver une régularité*

a) Choisir trois nombres consécutifs (par exemple $5, 6, 7$). Calculer leur somme.
b) Recommencer avec $10, 11, 12$. Calculer leur somme.
c) Recommencer avec $-2, -1, 0$. Calculer leur somme.
d) Conjecturer une propriété générale.
e) Prouver la conjecture en notant n le plus petit des trois nombres consécutifs.

⑥ Réduire une expression : quand peut-on, quand ne peut-on pas ?

Remarque 5 (Le besoin de clôture : une expression peut rester « ouverte »). Face à une expression comme $3x + 2$, certains élèves cherchent à tout prix à la simplifier en un seul terme, par exemple en écrivant $3x + 2 = 5x$. Cette erreur traduit un besoin de **clôture** : l'élève veut une réponse « finie », sans terme restant. Or, $3x + 2$ est déjà sous sa forme la plus simple. Le terme $3x$ contient une lettre, le terme 2 n'en contient pas : ils ne sont pas **semblables** et ne peuvent pas être réduits ensemble. C'est analogue à la situation où l'on additionnerait 3 pommes et 2 ans : les unités ne sont pas comparables.
Règle. On peut réduire deux termes seulement s'ils sont **semblables**, c'est-à-dire s'ils ont la même partie littérale.

$$3x + 2x = 5x \quad ; \quad 4y - y = 3y \quad ; \quad 3x + 2 \text{ ne se réduit pas.}$$

Exercice 10 *Démasquer le besoin de clôture* Voici quatre productions d'élèves. Pour chacune, dire si elle est correcte. Si elle est incorrecte, identifier l'erreur et donner le résultat juste.

a) $3x + 2 = 5x$
b) $4a - 2a = 2a$
c) $5y + 3y = 8y^2$
d) $7x + 2 - 3x = 4x + 2$

Exercice 11 *Réduire ce qui peut l'être* Réduire chacune des expressions suivantes, lorsque c'est possible. Sinon, indiquer que l'expression est déjà sous forme réduite.

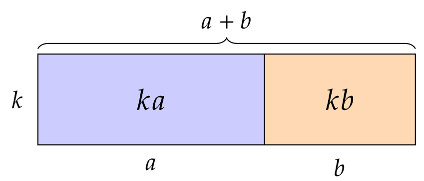
a) $5x + 3x$
b) $4a + 7$
c) $6y - 2y + 3y$
d) $2x + 5 - x + 1$
e) $3a + 2b$
f) $8t - 5t - 3t$

⑦ Distributivité simple

Remarque 6 (Multiplier une somme par un facteur). La **distributivité** traduit le fait que multiplier un facteur par une somme revient à multiplier ce facteur par chaque terme, puis à additionner les résultats.

$$k(a + b) = ka + kb \quad ; \quad k(a - b) = ka - kb.$$

On peut justifier cette règle par le calcul d'une aire : un rectangle de longueur $a + b$ et de largeur k a pour aire $k(a + b)$, et il se découpe en deux rectangles d'aires ka et kb.



Exercice 12 *Développer une expression* Développer chacune des expressions suivantes.

a) $3(x + 4)$
b) $5(a - 2)$
c) $2(3y + 1)$
d) $-4(x + 7)$
e) $-(2a + 5)$
f) $\frac{1}{2}(6x - 8)$

Exercice 13 *Factoriser une expression* Factoriser chacune des expressions suivantes en mettant en facteur le nombre indiqué.

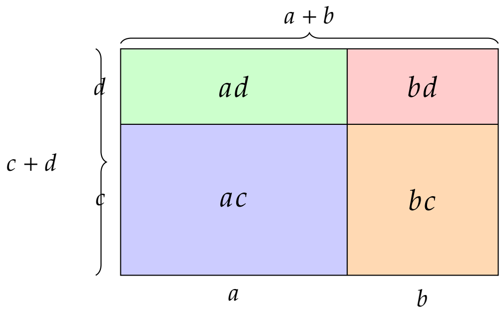
a) $5x + 10$ (facteur 5)
b) $6a - 9$ (facteur 3)
c) $4y + 12$ (facteur 4)
d) $14x - 7$ (facteur 7)
e) $-3a + 6$ (facteur 3)

8 Double distributivité

Remarque 7 (Multiplier deux sommes entre elles). Lorsqu'on multiplie deux sommes, chaque terme de la première est multiplié par chaque terme de la seconde.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Comme pour la distributivité simple, cette règle s'interprète par les aires : un rectangle de longueur $a + b$ et de largeur $c + d$ se découpe en quatre sous-rectangles d'aires ac, ad, bc et bd.



Exercice 14 *Développer un produit* Développer et réduire chacune des expressions suivantes.

a) $(x + 2)(x + 3)$
b) $(a + 5)(a - 4)$
c) $(2y + 1)(y + 7)$
d) $(3x - 2)(x + 1)$

Exercice 15 *Démasquer une erreur sur le carré* Un élève écrit : $(x + 3)^2 = x^2 + 9$.

a) Vérifier cette égalité par substitution avec $x = 1$, $x = 2$ et $x = -1$. Que constate-t-on ?
b) Donner le développement correct de $(x + 3)^2$.

9 Lettres et valeurs

Remarque 8 (Deux lettres différentes peuvent désigner le même nombre). Une croyance fréquente consiste à supposer que deux lettres distinctes désignent nécessairement des nombres différents. C'est faux : les lettres sont des étiquettes qu'on a choisies pour désigner des nombres, et rien n'interdit que deux étiquettes nomment le même nombre.
Si l'on écrit $a + b = 10$, les couples $(a\,;\,b)$ qui conviennent sont multiples : $(0\,;\,10)$, $(3\,;\,7)$, $(5\,;\,5)$, $(-2\,;\,12)$, etc. Le couple $(5\,;\,5)$ est tout à fait acceptable : a et b valent tous deux 5, mais cela n'empêche pas de les avoir nommés différemment.
À l'inverse, deux occurrences de la **même lettre** dans une expression désignent toujours le même nombre. Dans $3x + 2x$, les deux x ont obligatoirement la même valeur.

Exercice 16 *Trouver des couples solutions*

a) Donner trois couples $(a\ ;\ b)$ d'entiers tels que $a + b = 8$. L'un de ces couples peut-il vérifier $a = b$?
b) Donner trois couples $(x\ ;\ y)$ tels que $x \times y = 12$. L'un de ces couples peut-il vérifier $x = y$?
c) Si $a + b = a + c$, peut-on en déduire que $b = c$? Justifier.

10 Pour s'auto-évaluer

Remarque 9 (Cinq questions à se poser). Avant de manipuler une expression algébrique, prendre l'habitude de se poser ces cinq questions.

- Que représente cette lettre ? Un nombre, et non un mot ou un objet.
- L'écriture $3a$ désigne-t-elle bien le produit $3 \times a$, et non la juxtaposition des chiffres ?
- Les termes que je veux regrouper sont-ils semblables (même partie littérale) ? Sinon, l'expression reste sous forme « ouverte ».
- Le signe = que j'utilise exprime-t-il une équivalence valable pour toute valeur, ou une équation à résoudre pour une valeur particulière ?
- Puis-je vérifier mon calcul par substitution, en remplaçant la lettre par une valeur simple $(0, 1, -1)$?