MATHÉMATIQUES

Les erreurs les plus fréquentes

Pour ne plus les commettre

CALCUL ALGÉBRIQUE

Distributivité du signe moins

- **L'erreur :** ne changer que le signe du premier terme de la parenthèse

$$5 - (2x - 3) \neq 5 - 2x - 3.$$

- **La règle :** le signe moins devant une parenthèse inverse les signes de **tous** les termes situés à l'intérieur.
- **La correction :**

$$5 - (2x - 3) = 5 - 2x + 3 = 8 - 2x.$$

Le signe appartient au terme

- **L'erreur :** déplacer un nombre en laissant son signe derrière lui, ou attribuer le signe de la soustraction au mauvais nombre

$$3 - x + 5 \neq 3 - 5 + x$$

$$7 - 3 + 2 \neq 7 - 5.$$

- **La règle :** un terme algébrique est un bloc inséparable composé de son signe (situé à sa gauche) et de sa valeur. Une soustraction $a - b$ est en réalité l'addition $a + (-b)$.
- **La correction :**

$$3 - x + 5 = 3 + 5 - x = 8 - x.$$

Le carré d'une somme (Identités remarquables)

- **L'erreur :** oublier le double produit (distributivité incomplète)

$$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2.$$

- **La correction :**

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Réduction abusive d'un binôme

- **L'erreur :** additionner un terme constant et un terme contenant la variable comme s'ils étaient de même nature

$$3 + 2x \neq 5x.$$

- **La règle :** on n'additionne que des termes de même nature. Le nombre 3 et le terme $2x$ ne peuvent pas être combinés tant que x n'a pas de valeur fixée.
- **La correction :** l'expression $3 + 2x$ est déjà sous sa forme réduite ; elle reste telle quelle.

Carré d'une différence

- **L'erreur :** oublier le double produit, ou se tromper de signe sur le terme b^2

$$(a-b)^2 \neq a^2 - b^2$$

$$(a-b)^2 \neq a^2 - 2ab - b^2.$$

- **La règle :** le carré d'une différence comporte un double produit affecté du signe moins, et le terme b^2 reste positif (le carré d'un réel est toujours positif).
- **La correction :**

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Double distributivité partielle

- **L'erreur :** ne distribuer que les termes « parallèles », en oubliant les produits croisés

$$(a+b)(c+d) \neq ac + bd.$$

- **La règle :** la double distributivité produit *quatre* termes, obtenus en multipliant chaque terme du premier facteur par chaque terme du second.
- **La correction :**

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

CALCUL FRACTIONNAIRE

Simplification abusive

- **L'erreur :** simplifier des termes (addition) au lieu de facteurs (multiplication)

$$\frac{x+\cancel{2}}{\cancel{2}} \neq x + 1$$

$$\frac{\cancel{2}x+8}{\cancel{2}} \neq x + 8.$$

- **La règle :** on ne peut simplifier une fraction que si le numérateur et le dénominateur sont sous forme factorisée (multiplication).
- **La correction :**

$$\frac{2x+8}{2} = \frac{2(x+4)}{2} = \frac{\cancel{2}(x+4)}{\cancel{2}} = x + 4.$$

Fausse linéarité de l'inverse

- **L'erreur :** séparer l'inverse d'une somme

$$\frac{1}{a+b} \neq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

- **Un contre-exemple :** $\frac{1}{2+3} = \frac{1}{5}$, alors que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.
- **La correction :** il n'existe pas de formule pour simplifier $\frac{1}{a+b}$.

Addition de fractions

- **L'erreur :** additionner les numérateurs et les dénominateurs entre eux

$$\boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq \frac{2}{5}.}$$

- **La règle :** il est impératif de mettre les fractions au même dénominateur avant de les additionner.
- **La correction :**

$$\boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}.}$$

PUISSANCES ET RACINES

Priorité des opérations

- **L'erreur :** appliquer la puissance au signe moins sans parenthèses

$$\boxed{-3^2 \neq 9.}$$

- **La règle :** l'exponentiation est prioritaire sur la négation (le signe moins).
- **La correction :**
  - $\boxed{-3^2 = -9}$ (l'opposé du carré de 3) ;
  - $\boxed{(-3)^2 = 9}$ (le carré de -3).

Règles opératoires sur les puissances

- **L'erreur :** confondre addition et multiplication des exposants

$$\boxed{x^2 + x^3 \neq x^5}$$

$$\boxed{(x^2)^3 \neq x^5.}$$

- **La correction :**
  - $\boxed{x^2 + x^3 \text{ ne se simplifie pas.}}$ (somme de termes de degrés différents) ;
  - $\boxed{x^a \times x^b = x^{a+b}}$ (produit : somme des exposants) ;
  - $\boxed{(x^a)^b = x^{a \times b}}$ (puissance de puissance : produit des exposants).

Fausse linéarité de la racine carrée

- **L'erreur :** séparer une racine carrée sur une somme

$$\boxed{\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}.}$$

- **La preuve (contre-exemple) :** $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.

- **La correction :** $\boxed{\text{il n'existe pas de formule pour simplifier } \sqrt{a+b}.}$ Le calcul doit se faire à l'intérieur d'abord.

Racine carrée d'un carré

- **L'erreur :** oublier la valeur absolue
$$\boxed{\sqrt{x^2} \neq x.}$$
- **La preuve (contre-exemple) :** $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$.
- **La règle :** la racine carrée renvoie toujours un nombre positif ou nul.
- **La correction :**
$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|.}$$

Racine carrée et résolution d'équation

- **L'erreur :** confondre la valeur de $\sqrt{a}$ avec les solutions de l'équation $x^2 = a$
$$\boxed{\sqrt{16} \neq \pm 4.}$$
- **La règle :** pour tout réel positif a, $\sqrt{a}$ désigne l'*unique* réel positif dont le carré vaut a. Résoudre $x^2 = a$ donne deux solutions ($\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$), mais $\sqrt{a}$ tout seul est un nombre, pas un ensemble de solutions.
- **La correction :**
$$\boxed{\sqrt{16} = 4.}$$
Pour résoudre $x^2 = 16$, voir la rubrique « Résolution de $x^2 = a$ » plus loin.

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

Inéquations et division par un négatif

- **L'erreur :** conserver le sens de l'inégalité lors d'une division par un nombre négatif
$$\boxed{-2x > 10 \implies x > -5.}$$
- **La règle :** multiplier ou diviser une inégalité par un nombre strictement négatif change le sens de l'inégalité.
- **La correction :**
$$\boxed{-2x > 10 \implies x < -5.}$$

Division par l'inconnue

- **L'erreur :** simplifier une équation en divisant par x
$$\boxed{x^2 = 5x \implies x = 5.}$$
- **Le problème :** cette méthode suppose que $x \neq 0$, or 0 est souvent une solution.
- **La correction :** toujours passer les termes d'un même côté de l'égalité puis factoriser
$$\boxed{x^2 - 5x = 0 \iff x(x-5) = 0.}$$

Solutions : 0 et 5.

- **Attention :** le problème est encore plus grave avec les inéquations. Diviser par x sans connaître son signe peut inverser l'inégalité ou faire perdre des solutions. Il faut impérativement faire une disjonction de cas selon le signe de x.

Propriété du produit nul

- **L'erreur :** appliquer la propriété du produit nul quand le résultat n'est pas zéro

$$\boxed{(x+1)(x-2)=4 \implies x+1=4 \text{ ou } x-2=4.}$$

- **La règle :** un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul. Cela ne fonctionne qu'avec 0.
- **La correction :** il faut développer, tout passer dans le membre de gauche pour avoir $=0$ dans le membre de droite, puis essayer de factoriser ou utiliser le discriminant (Δ).

Résolution de $x^2 = a$

- **L'erreur :** oublier la solution négative

$$\boxed{x^2 = 25 \implies x = 5.}$$

- **La correction :** pour tout $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions

$$\boxed{x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}.}$$

Donc ici : $x = 5$ ou $x = -5$.

Vérification du domaine

- **L'erreur :** accepter une solution candidate sans contrôler qu'elle appartient au domaine de définition de l'équation

$$\boxed{\frac{1}{x-2} = 3 \implies x = 2 \text{ accepté.}}$$

- **La règle :** avant ou après la résolution, on identifie les valeurs interdites (dénominateur nul, racine d'un négatif, ln d'un négatif). Toute solution candidate qui les rencontre est rejetée.
- **La correction :** ici, $x = 2$ annule le dénominateur et est exclue d'emblée. La résolution donne $1 = 3(x-2)$, soit $\boxed{x = \frac{7}{3}}$, qui est bien dans le domaine.

Élévation au carré et solutions parasites

- **L'erreur :** élever au carré les deux membres d'une équation et accepter toutes les solutions sans les vérifier dans l'équation initiale

$$\boxed{\sqrt{x+1} = x-1 \implies x+1 = (x-1)^2 \implies x = 0 \text{ ou } x = 3.}$$

- **La règle :** l'élévation au carré transforme l'égalité $A = B$ en $A^2 = B^2$, ce qui ajoute des solutions vérifiant $A = -B$. Il est donc indispensable de tester chaque candidate dans l'équation initiale.
- **La correction :** pour $x = 0$, le membre de gauche vaut 1 et le membre de droite vaut -1 : solution rejetée. Pour $x = 3$, les deux membres valent 2 : solution acceptée. Donc $\boxed{x = 3.}$

Inéquation à dénominateur contenant l'inconnue

- **L'erreur :** multiplier les deux membres par une expression contenant l'inconnue sans connaître son signe
$$\boxed{\frac{1}{x} > 2 \implies 1 > 2x \implies x < \frac{1}{2}.}$$
- **La règle :** multiplier une inéquation par une expression dont le signe est inconnu peut inverser l'inégalité ou faire perdre des solutions. On ramène tout dans un même membre puis on étudie le signe de la fraction obtenue.
- **La correction :** on écrit $\frac{1}{x} - 2 > 0$, soit $\frac{1-2x}{x} > 0$. Étude du signe : la fraction est positive sur $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$. Donc $\boxed{x \in \left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[.}$

ANALYSE ET FONCTIONS

Confusion objet/image

- **L'erreur :** dire « la fonction $f(x)$ est croissante ».
- **La précision :** f est la fonction (l'objet mathématique), $f(x)$ est un nombre réel (l'image de x par f).
- **La correction :**
  - on dit « la fonction f est croissante sur l'intervalle I » ;
  - on dit « $f(x)$ vaut... » ou « l'image de x par f est... ».

Application abusive de formules

- **L'erreur :** inventer des propriétés de distributivité pour les fonctions usuelles
$$\boxed{\ln(a+b) \neq \ln(a) + \ln(b)}$$
$$\boxed{\sin(a+b) \neq \sin(a) + \sin(b)}$$
$$\boxed{\exp(a+b) \neq \exp(a) + \exp(b).}$$
- **La correction :** ces fonctions ne sont pas linéaires. Il faut se référer aux formulaires spécifiques (transformations de sommes en produits ou inversement).

Signe de la fonction et signe de sa dérivée

- **L'erreur :** confondre le sens de variation de f et son signe, c'est-à-dire confondre le signe de $f(x)$ et le signe de $f'(x)$
$$\boxed{f \text{ croissante sur } I \iff f \text{ positive sur } I.}$$
- **La règle :** f est croissante sur I si $f'(x) \geqslant 0$ sur I. f est positive sur I si $f(x) \geqslant 0$ sur I. Ces deux propriétés sont indépendantes : une fonction peut être croissante et négative, croissante et positive, etc.
- **Un contre-exemple :** $f(x) = x - 5$ est croissante sur $\mathbb{R}$ (car $f'(x) = 1 > 0$) mais négative sur $]-\infty\,;\,5[$.

Lecture graphique de la fonction et de sa dérivée

- **L'erreur :** lire un graphique étiqueté f' comme s'il représentait f, ou inversement.
- **La règle :** sur un graphique, l'étiquette désigne la fonction représentée. Pour passer de f à f', on lit les pentes des tangentes. Pour passer de f' à f, on lit le *signe* de f' qui donne le sens de variation de f, et non ses valeurs.
- **Un repère utile :** si la courbe d'une fonction passe par 0, c'est cette fonction qui s'annule. Si elle est étiquetée f', c'est un extremum local de f ; si elle est étiquetée f, c'est un zéro de f.

Justification absente de la dérivabilité

- **L'erreur :** calculer f' sans avoir énoncé que f est dérivable, ni précisé sur quel domaine

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{(sans préciser le domaine).}}$$

- **La règle :** avant tout calcul de dérivée, on justifie la dérivabilité : f est dérivable comme fonction polynôme, comme produit, comme quotient sur le domaine où le dénominateur ne s'annule pas, etc. Cette justification n'est pas un détail, c'est une étape de la rédaction.
- **La correction :** « La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme inverse d'une fonction qui ne s'annule pas. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\boxed{f'(x) = -\frac{1}{x^2}.}$ »

Dérivée d'un produit ou d'un quotient

- **L'erreur :** appliquer à un produit ou à un quotient la règle de la somme

$$\boxed{(uv)' \neq u'v'}$$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' \neq \frac{u'}{v'}.}$$

- **La règle :** l'opérateur de dérivation est linéaire pour la somme et la multiplication par un scalaire seulement. Le produit et le quotient suivent des formules spécifiques.
- **La correction :**

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.}$$

LOGARITHME ET EXPONENTIELLE

Logarithme d'un produit

- **L'erreur :** confondre la transformation « produit en somme » avec une distributivité multiplicative

$$\boxed{\ln(ab) \neq \ln(a) \times \ln(b).}$$

- **La règle :** le logarithme d'un produit est la *somme* des logarithmes, pas leur produit. La fonction ln transforme les produits en sommes : c'est l'une de ses propriétés caractéristiques.
- **La correction :**

$$\boxed{\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad (a > 0,\ b > 0).}$$

Domaine du logarithme

- **L'erreur :** accepter une solution sans contrôler que les arguments du logarithme restent strictement positifs

$$\boxed{\ln(x-3) = \ln(2x+1) \implies x - 3 = 2x + 1 \implies x = -4 \text{ accepté.}}$$

- **La règle :** la fonction ln n'est définie que pour les réels strictement positifs. Une équation impliquant des ln doit être résolue sur le domaine où *tous* les arguments sont positifs.
- **La correction :** le domaine est $]3\,;\,+\infty[$ (intersection de $x - 3 > 0$ et $2x + 1 > 0$). Comme $x = -4$ n'appartient pas à ce domaine, $\boxed{\text{l'équation n'admet pas de solution.}}$

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET VECTEURS

Coordonnées d'un vecteur

- **L'erreur :** inverser l'ordre dans la soustraction des coordonnées

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}.}$$

- **La règle :** pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui va du point A vers le point B, on calcule « *arrivée moins départ* », c'est-à-dire les coordonnées de B moins celles de A.
- **La correction :**

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.}$$

Notation point ou vecteur

- **L'erreur :** écrire les coordonnées d'un vecteur comme on écrit celles d'un point

$$\boxed{\overrightarrow{AB}(3\,;\,5).}$$

- **La règle :** un point se note avec parenthèses, $A(3\,;\,5)$. Un vecteur, à la française, se note avec une flèche et ses coordonnées sont disposées en colonne.
- **La correction :**

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.}$$

Distance entre deux points

- **L'erreur :** oublier la racine carrée dans la formule de la distance

$$\boxed{AB \neq (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.}$$

- **La règle :** la distance AB s'obtient en appliquant le théorème de Pythagore dans le repère orthonormé. La somme des carrés des écarts de coordonnées donne AB^2 ; il faut prendre la racine pour obtenir AB.
- **La correction :**

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.}$$

PROBABILITÉS

Incompatibilité et indépendance

- **L'erreur :** déduire l'indépendance de l'incompatibilité, ou l'inverse

$$\boxed{A \cap B = \emptyset \implies A \text{ et } B \text{ indépendants.}}$$

- **La règle :** deux événements sont *incompatibles* si $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$. Ils sont *indépendants* si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Ce sont deux propriétés différentes. Mieux : deux événements de probabilités non nulles incompatibles sont nécessairement *dépendants* (la réalisation de l'un empêche celle de l'autre).
- **Un contre-exemple :** on lance un dé. Soit $A = \{1\,;\,2\}$ et $B = \{3\,;\,4\}$. On a $A \cap B = \emptyset$, et $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \times P(B) = \frac{1}{9}$. Donc A et B ne sont pas indépendants.

Inversion de probabilité conditionnelle

- **L'erreur :** confondre $P_A(B)$ et $P_B(A)$

$$\boxed{P_A(B) = P_B(A).}$$

- **La règle :** $P_A(B)$ est la probabilité que B se réalise *sachant que* A s'est réalisé. $P_B(A)$ est l'inverse. Ces deux probabilités sont liées par la formule de Bayes mais ne sont pas égales en général.
- **Un contre-exemple :** dans une population, soit A « être un chat » et B « avoir quatre pattes ». On a $P_A(B) = 1$ (tout chat a quatre pattes), mais $P_B(A) \ll 1$ (la majorité des animaux à quatre pattes ne sont pas des chats).

Coefficient binomial dans la loi binomiale

- **L'erreur :** oublier le coefficient binomial dans l'expression de la probabilité

$$\boxed{P(X = k) \neq p^k(1-p)^{n-k}.}$$

- **La règle :** pour X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,p)$, l'événement $\{X = k\}$ regroupe toutes les manières de placer k succès parmi n épreuves. Ce nombre de manières est précisément $\binom{n}{k}$.
- **La correction :**

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}.}$$

TRIGONOMÉTRIE

Valeurs remarquables

- **L'erreur :** échanger les valeurs de sin et de cos pour les angles remarquables, ou inverser les angles eux-mêmes

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq \frac{1}{2}.}$$

- **La règle :** pour des angles aigus, plus l'angle est petit, plus le sinus est petit (et le cosinus grand). Le triangle équilatéral et le triangle rectangle isocèle donnent les valeurs remarquables qu'il faut savoir par cœur.

- **La correction :**

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.}$$

Le cosinus se déduit par symétrie : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.