La dérivation

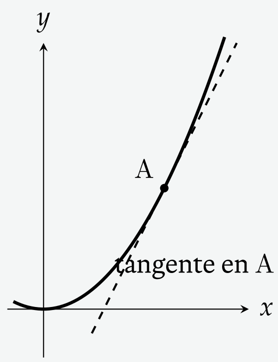
Dériver une fonction, c'est mesurer la rapidité avec laquelle elle varie. Le nombre dérivé en un point est la pente de la tangente à la courbe en ce point : il dit si la fonction monte, descend, et à quelle vitesse. Tout l'intérêt de la dérivation est là : le signe de la dérivée donne les variations de la fonction, ce qui permet de trouver les maximums et les minimums. La difficulté principale est d'appliquer correctement les formules, surtout celle du produit et celle du quotient.

Nombre dérivé et tangente (1re)

Nombre dérivé : le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$, est la limite du taux de variation :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Interprétation graphique : $f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe de f au point d'abscisse a.
Équation de la tangente : la tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.



Dérivées des fonctions de référence (1re)

Fonction $f(x)$	**Dérivée** $f'(x)$
k (constante)	0
x	1
x^2	$2x$
x^n (avec n entier)	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$ (avec $x \neq 0$)	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$ (avec $x > 0$)	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Opérations sur les dérivées (1re)

On note u et v deux fonctions dérivables, et k un réel.

Fonction	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$k\,u$	$k\,u'$
$u\,v$	$u'v + uv'$
$\dfrac{u}{v}$ (avec $v \neq 0$)	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

La formule du produit et celle du quotient sont les deux sources d'erreurs les plus fréquentes : il faut les écrire en entier avant de remplacer.

Méthode : calculer une fonction dérivée

1. Reconnaître la structure de f (somme, produit, quotient).
2. Identifier u, v et leurs dérivées u', v'.
3. Appliquer la formule correspondante, puis réduire.

Exemple. Dériver $g(x) = (2x+1)(x^2-3)$.
C'est un produit : on pose $u = 2x + 1$ et $v = x^2 - 3$, donc $u' = 2$ et $v' = 2x$.

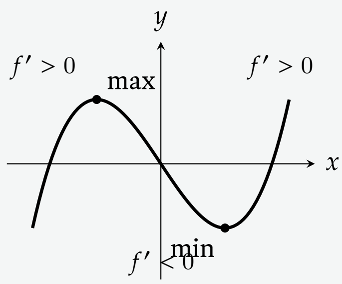
$$g'(x) = u'v + uv' = 2(x^2-3) + (2x+1)(2x)$$
$$g'(x) = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x$$
$$g'(x) = 6x^2 + 2x - 6.$$

Dérivée et variations (1re)

Sur un intervalle I :

- si $f'(x) > 0$ sur I, alors f est croissante sur I ;
- si $f'(x) < 0$ sur I, alors f est décroissante sur I ;
- si f' s'annule en changeant de signe en a, alors f admet un extremum (maximum ou minimum) en a.

Étudier les variations d'une fonction revient donc à étudier le **signe de sa dérivée**.



Exemple. Soit $f(x) = x^3 - 3x$. Alors $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$, qui s'annule en -1 et 1. Comme $a = 3 > 0$, $f'(x)$ est positif à l'extérieur de $[-1 ; 1]$ et négatif à l'intérieur. On dresse alors le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f admet ainsi un maximum local égal à 2 en -1, et un minimum local égal à -2 en 1.

Exercice 1 ***Calculer des dérivées*** Dériver les fonctions suivantes.

a) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 7x - 1$

b) $g(x) = (3x-2)(x+5)$

c) $h(x) = \dfrac{x}{x+1}$

d) $k(x) = 5\sqrt{x} + \dfrac{2}{x}$

Exercice 2 ***Tangente et variations*** On considère $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

Exercice 3 ***Synthèse*** **(4 points)** Une entreprise produit x centaines d'objets. Son coût moyen, en euros, est modélisé par $\mathrm{C}(x) = x^2 - 8x + 20$ pour $x \in]0\ ;\ 10]$.

1. Calculer $\mathrm{C}'(x)$.
2. Pour quelle production le coût moyen est-il minimal ? Quel est ce coût minimal ?
3. Justifier que c'est bien un minimum à l'aide du signe de $\mathrm{C}'(x)$.

Erreurs classiques à éviter

Erreur	**Exemple faux**	**Correction**
Dériver un produit terme à terme	$(uv)' = u'v'$	$(uv)' = u'v + uv'$
Oublier l'exposant $n-1$	$(x^5)' = 5x^5$	$(x^5)' = 5x^4$
Se tromper de signe sur $\dfrac{1}{x}$	$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
Confondre f et f' pour les variations	étudier le signe de f	on étudie le signe de f'

SOLUTIONS DES EXERCICES

Corrigé de l'exercice 1.

1. $f'(x) = 12x^2 - 4x + 7$.
2. Produit avec $u = 3x - 2$, $v = x + 5$, $u' = 3$, $v' = 1$: $g'(x) = 3(x+5) + (3x-2) \times 1 = 3x + 15 + 3x - 2 = 6x + 13$.
3. Quotient avec $u = x$, $v = x + 1$, $u' = 1$, $v' = 1$:

$$h'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

4. $k'(x) = 5 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{5}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^2}$.

Corrigé de l'exercice 2.

1. $f'(x) = 2x - 4$.
2. Au point d'abscisse 0 : $f'(0) = -4$ et $f(0) = 1$. La tangente a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -4x + 1$.
3. $f'(x) = 2x - 4 = 0 \iff x = 2$. Comme le coefficient de x est positif, $f'(x) < 0$ pour $x < 2$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 2$. Donc f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 2]$ puis croissante sur $[2\ ;\ +\infty[$; elle admet un minimum en 2, avec $f(2) = 4 - 8 + 1 = -3$.

Corrigé de l'exercice 3.

1. $\mathrm{C}'(x) = 2x - 8$.
2. $\mathrm{C}'(x) = 0 \iff x = 4$. Le coût moyen est minimal pour $x = 4$ (quatre cents objets), et vaut $\mathrm{C}(4) = 16 - 32 + 20 = 4$ euros.
3. $\mathrm{C}'(x) = 2x - 8$ est négatif pour $x < 4$ et positif pour $x > 4$: C décroît puis croît, donc $x = 4$ correspond bien à un minimum.