

Convexité — Fiche d'exercices

Cette fiche accompagne le mémo sur la convexité. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver la définition géométrique (position par rapport aux tangentes), le théorème de la dérivée seconde et la caractérisation des points d'inflexion. Garde toujours à l'esprit que f' donne les variations et f'' la convexité : ce sont deux questions différentes.

Exercice 1 Lire la convexité (T^{le}).

1. Pour chaque fonction de référence, dire si elle est convexe ou concave sur l'intervalle indiqué :

a) $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$:

b) $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$:

c) $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0 ; +\infty[$:

d) $x \mapsto \ln x$ sur $]0 ; +\infty[$:

e) $x \mapsto -x^2$ sur $\mathbb{R}$:

f) $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$:

2. La courbe d'une fonction f est au-dessus de toutes ses tangentes sur $[0 ; 5]$. Que peut-on dire de f sur cet intervalle ? Et de f' ?

.....
.....

3. Une fonction peut-elle être croissante et concave sur un même intervalle ? Donner un exemple ou expliquer pourquoi c'est impossible.

.....
.....

Exercice 2 Calculer une dérivée seconde, étape par étape (T^{le}).

1. Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Compléter : $f'(x) = \dots\dots\dots$ et $f''(x) = \dots\dots\dots = 6(x - \dots\dots)$.
Donc $f'' \leq 0$ sur et $f'' \geq 0$ sur : f est concave sur et convexe sur

2. Calculer la dérivée seconde et étudier la convexité de chaque fonction.

a) $g(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$

b) $h(x) = x^4$ sur $\mathbb{R}$

c) $k(x) = \ln x$ sur $]0 ; +\infty[$

d) $m(x) = -x^2 + 4x$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 3 Déterminer les points d'inflexion (T^{le}).

1. Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Déterminer les coordonnées du point d'inflexion de sa courbe, puis l'équation de la tangente en ce point.

2. Soit $g(x) = x^4 - 6x^2$. Calculer $g''(x)$, le factoriser, et déterminer les points d'inflexion.

3. Soit $h(x) = x^4$. Montrer que $h''(0) = 0$ et expliquer pourquoi la courbe de h n'a pourtant pas de point d'inflexion.

Exercice 4 Démontrer une inégalité (T^{le}).

- La fonction $\ln$ est concave sur $]0 ; +\infty[$. Compléter : $\ln 1 = \dots\dots\dots$ et $(\ln)'(1) = \dots\dots\dots$, donc la tangente en 1 a pour équation $y = \dots\dots\dots$.
La courbe étant $\dots\dots\dots$ de sa tangente, on en déduit que pour tout $x > 0$: $\ln x \dots\dots\dots x - 1$.
- La fonction $f(x) = x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'équation de sa tangente au point d'abscisse 1, en déduire une inégalité, puis la vérifier par un calcul algébrique direct.

3. En utilisant la tangente à l'exponentielle en 1, montrer que $e^x \geq ex$ pour tout réel x .

Exercice 5 Étude complète : variations et convexité (T^{le}). Soit $f(x) = (x - 2)e^x$, définie sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que $f'(x) = (x - 1)e^x$ et dresser le tableau de variations de f (limites : $f(x) \rightarrow 0$ en $-\infty$ et $f(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$, admises).

2. Montrer que $f''(x) = x e^x$ et étudier la convexité de f .

3. Donner les coordonnées du point d'inflexion et l'équation de la tangente en ce point.

Exercice 6 Problème en contexte : coût de production (T^6). Le coût total de production de x centaines d'objets, en milliers d'euros, est modélisé par $C(x) = 0,1x^3 - 1,5x^2 + 10x + 20$ pour $x \in [0 ; 12]$. Le coût marginal est la dérivée C' : il représente le coût de production d'une centaine d'objets supplémentaire.

1. Calculer $C'(x)$ et $C''(x)$.

2. Étudier la convexité de C sur $[0 ; 12]$ et donner l'abscisse du point d'inflexion.

3. Étudier les variations du coût marginal C' . Pour quelle production est-il minimal? Que vaut-il alors?

4. Interpréter économiquement les deux phases séparées par le point d'inflexion.

.....

.....

.....

.....

Exercice 7 QCM (T^le). Pour chaque question, entourer la seule réponse correcte, puis justifier en une phrase.

1. Une fonction f deux fois dérivable est convexe sur I si et seulement si :

- A. f est croissante sur I B. $f''(x) \geq 0$ sur I C. $f'(x) \geq 0$ sur I D. $f(x) \geq 0$ sur I

.....

2. La fonction exponentielle est :

- A. concave sur $\mathbb{R}$ B. convexe sur $]0 ; +\infty[$ seulement
C. ni convexe ni concave D. convexe sur $\mathbb{R}$

.....

3. Un point d'inflexion est un point où :

- A. f' s'annule B. la courbe coupe l'axe des abscisses
C. f'' s'annule en changeant de signe D. f atteint un extremum

.....

4. Si f est convexe sur I , sa courbe est, sur I :

- A. au-dessus de chacune de ses tangentes B. en dessous de chacune de ses tangentes
C. confondue avec ses tangentes D. au-dessus de l'axe des abscisses

.....

Exercice 8 Vrai ou faux? Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Une fonction croissante sur un intervalle y est convexe.

B. Si $f''(x) > 0$ sur I , alors f' est croissante sur I .

C. La fonction $x \mapsto x^3$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

D. La fonction $\ln$ est concave sur $]0 ; +\infty[$.

E. Si $f''(a) = 0$, alors la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse a .

F. Pour tout réel x , $e^x \geq 1 + x$.

G. Une fonction concave sur un intervalle y est décroissante.

H. Une fonction affine est à la fois convexe et concave.