Le calcul littéral

Le calcul littéral consiste à effectuer des calculs avec des nombres et des lettres. C'est le langage de l'algèbre : il permet de traduire des situations, de démontrer des propriétés et de résoudre des problèmes. Pourtant, il est l'une des premières causes de décrochage en mathématiques au collège. La difficulté vient souvent d'un malentendu fondamental : les élèves traitent les lettres comme des étiquettes (« a = une pomme ») au lieu de comprendre qu'une lettre **représente un nombre**.

Vocabulaire (5e)

Expression littérale : expression mathématique contenant au moins une lettre qui représente un nombre. Exemples : $3x + 5$; $2a - 7b + 1$; $x^2 + 3x$.

Variable : la lettre qui représente un nombre dont on ne connaît pas (encore) la valeur. Dans $3x + 5$, la variable est x.

Terme : chaque morceau d'une expression séparé par un + ou un −. Dans $3x + 5$, les termes sont $3x$ et 5.

Coefficient : le nombre qui multiplie la variable dans un terme. Dans $3x$, le coefficient de x est 3. Dans x tout seul, le coefficient est 1 (car $x = 1 \times x$). Dans $-x$, le coefficient est -1.

Terme constant : un terme sans variable (un nombre seul). Dans $3x + 5$, le terme constant est 5.

*Attention : une lettre représente **un nombre**, pas un objet. Écrire « 3a signifie 3 pommes » est un raccourci dangereux qui empêche de comprendre pourquoi $a + a = 2a$ et non a^2.*

Autre piège courant : deux lettres différentes peuvent représenter le même nombre. Si $a + b = 10$, il est tout à fait possible que $a = 5$ et $b = 5$.

Conventions d'écriture (5e)

En algèbre, on adopte des conventions pour **simplifier l'écriture**. Ces conventions ne changent rien au calcul, mais il faut les connaître pour lire et écrire les expressions correctement.

Exemples

Règle	Exemple
On supprime le signe × devant une lettre ou une parenthèse.	$3 \times x = 3x$ $5 \times (x + 1) = 5(x + 1)$ $a \times b = ab$
On écrit le nombre **avant** la lettre.	$x \times 3 = 3x$ (et non $x3$)
On n'écrit pas le coefficient 1.	$1 \times x = x$ (et non $1x$) $1 \times x^2 = x^2$
On écrit $-x$ au lieu de $-1 \times x$.	$-1 \times x = -x$ $-1 \times (x + 3) = -(x + 3)$
On écrit x^2 au lieu de $x \times x$, et x^3 au lieu de $x \times x \times x$.	$x \times x = x^2$ $2 \times x \times x = 2x^2$ Attention : $2x^2 \neq (2x)^2$

Exercice 1 ***Conventions d'écriture (5^e)*** Simplifier l'écriture de chaque expression :

a) $A = 4 \times x + 3$

b) $B = 1 \times y - 7$

c) $C = x \times 5 + x \times x$

d) $D = -1 \times a + 3 \times b \times 2$

e) $E = 7 \times (y + 2) - 1 \times y$

f) $F = a \times a \times a + 2 \times a \times b$

Substituer une valeur (5^e)

Substituer, c'est remplacer une variable par un nombre pour calculer la valeur de l'expression. On met **toujours** le nombre entre parenthèses à la place de la lettre, surtout quand il est négatif.

Exemples

- Calculer $3x + 5$ pour $x = 4$:

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= 3 \times \mathbf{4} + 5 && \text{(on remplace } x \text{ par } 4\text{)} \\ &= 12 + 5 \\ &= 17 \end{aligned}$$

- Calculer $3x + 5$ pour $x = -2$:

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= 3 \times \mathbf{(-2)} + 5 && \text{(on met } -2 \text{ entre parenthèses)} \\ &= -6 + 5 \\ &= -1 \end{aligned}$$

- Calculer $x^2 - 3x$ pour $x = -3$:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x &= \mathbf{(-3)}^2 - 3 \times \mathbf{(-3)} && \text{(on remplace } x \text{ par } (-3)\text{)} \\ &= 9 - (-9) && \text{(car } (-3)^2 = 9\text{)} \\ &= 9 + 9 \\ &= 18 \end{aligned}$$

Piège : $(-3)^2 = 9$ (le carré du nombre -3), mais $-3^2 = -(3^2) = -9$ (l'opposé de 3^2). Les parenthèses changent tout !

*Le signe = dans ces calculs signifie « est égal à », pas « donne ». Quand on écrit $3x + 5 = 17$, on affirme que les deux côtés ont la **même valeur**. On peut vérifier cette affirmation en substituant : c'est le lien direct entre substitution et équation.*

Exercice 2 ***Substituer et calculer (5^e)***

1. Calculer chaque expression pour $x = 3$:
   a) $A = 5x - 7$
   b) $B = x^2 + 2x$
   c) $C = 4(x + 1) - 3x$
2. Calculer chaque expression pour $x = -2$:
   a) $D = 3x + 10$
   b) $E = x^2 - 4x$
   c) $F = 2x^2 + x - 5$
3. Déterminer si $x = 5$ est solution de l'équation $2x - 3 = 7$.

Réduire une expression (5^e)

Réduire une expression, c'est regrouper les termes **de même nature** : les termes en x ensemble, les termes en x^2 ensemble, les termes constants ensemble.

Règle : on ne peut additionner que des termes qui contiennent la **même partie littérale**. On additionne alors les coefficients.

Exemples

- $3x + 5x = (3 + 5)x = 8x$.
- $7x - 2x + 4 = (7 - 2)x + 4 = 5x + 4$.
- $3x^2 + 5x - x^2 + 2x - 3 = (3 - 1)x^2 + (5 + 2)x - 3 = 2x^2 + 7x - 3$.
- $4x + 3y - x + 2y = (4 - 1)x + (3 + 2)y = 3x + 5y$.

Attention : $3x + 5$ *ne se réduit pas davantage (*$3x$ *et* 5 *ne sont pas de même nature). De même,* $3x + 5x^2$ *ne se réduit pas (*x *et* x^2 *ne sont pas de même nature).*

Exercice 3 ***Réduire des expressions (5^e–4^e)*** Réduire chaque expression :

$A = 5x + 3x - 2$

$B = 7a - 3a + 2a$

$C = 4x - 9 + 3x + 5$

$D = 6y + 3 - 8y - 7$

$E = 2x^2 + 5x - x^2 + 3x - 4$

$F = 3a + 2b - 5a + 4b + 1$

$G = x^2 + x + 1 - 2x^2 + 3x - 5$

$H = 5xy - 3x + 2xy + x$

Distributivité simple (5^e–4^e)

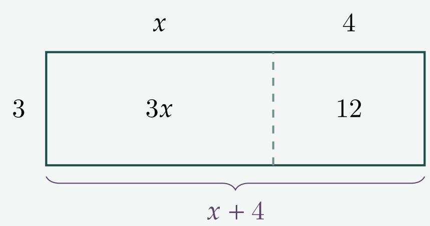
Développer, c'est supprimer les parenthèses en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$k(a + b) = ka + kb \qquad \text{et} \qquad k(a - b) = ka - kb$$

où k, a et b sont des nombres (éventuellement des expressions littérales).

Comprendre : multiplier par k*, c'est multiplier* ***chaque terme*** *à l'intérieur de la parenthèse par* k*. Si on oublie un terme, le résultat est faux.*

Modèle du rectangle : la distributivité correspond au calcul de l'aire d'un rectangle découpé en deux parties.



Aire totale = $3 \times (x + 4) = 3x + 12$.

Exemples

- $3(x + 4) = 3 \times x + 3 \times 4 = 3x + 12$.
- $5(2x - 3) = 5 \times 2x - 5 \times 3 = 10x - 15$.
- $-2(x + 5) = -2 \times x + (-2) \times 5 = -2x - 10$.
- $-(3x - 7) = -1 \times 3x - (-1) \times 7 = -3x + 7$ (distribuer -1 change les signes).
- $x(x + 3) = x \times x + x \times 3 = x^2 + 3x$.

Exercice 4 ***Développer (5ᵉ–4ᵉ)*** Développer chaque expression :

1. $A = 4(x + 2)$
2. $B = 3(5x - 1)$
3. $C = -2(3x + 4)$
4. $D = -(x - 9)$
5. $E = x(2x + 7)$
6. $F = -3x(x - 5)$

Développer et réduire (4ᵉ)

Quand une expression contient plusieurs termes avec des parenthèses, on procède en **deux étapes** :

1. **Développer** : on supprime chaque parenthèse en distribuant ;
2. **Réduire** : on regroupe les termes de même nature.

Exemples

- Développer et réduire $A = 3(x + 2) + 5(x - 1)$:

$$A = 3 \times x + 3 \times 2 + 5 \times x - 5 \times 1 \qquad \text{(on développe)}$$
$$A = 3x + 6 + 5x - 5$$
$$A = (3 + 5)x + (6 - 5) = 8x + 1 \qquad \text{(on réduit)}$$

- Développer et réduire $B = 4(2x - 3) - 2(x + 5)$:

$$B = 8x - 12 - 2x - 10 \qquad \text{(on développe)}$$
$$B = (8 - 2)x + (-12 - 10)$$
$$B = 6x - 22 \qquad \text{(on réduit)}$$

- Développer et réduire $C = x(x + 3) - 2(x - 4)$:

$$C = x^2 + 3x - 2x + 8 \qquad \text{(on développe)}$$
$$C = x^2 + (3 - 2)x + 8$$
$$C = x^2 + x + 8 \qquad \text{(on réduit)}$$

Exercice 5 ***Développer et réduire (4ᵉ)*** Développer et réduire chaque expression :

1. $A = 2(x + 4) + 3(x - 1)$
2. $B = 5(2x - 3) - 4(x + 2)$
3. $C = 7(x + 1) - (3x - 5)$
4. $D = x(x + 6) - 3(x - 2)$
5. $E = 2x(x - 4) + x(3x + 1)$
6. $F = (5x + 1) - (2x - 3) + 4(x + 2)$

Double distributivité (4e)

Pour développer un produit de deux sommes, on multiplie **chaque terme** de la première parenthèse par **chaque terme** de la seconde :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Il y a toujours **quatre produits** à effectuer.

Exemples

- Développer et réduire $A = (x + 3)(x + 5)$:
  $A = x \times x + x \times 5 + 3 \times x + 3 \times 5$
  $A = x^2 + 5x + 3x + 15$
  $A = x^2 + 8x + 15$
- Développer et réduire $B = (2x - 1)(x + 4)$:
  $B = 2x \times x + 2x \times 4 + (-1) \times x + (-1) \times 4$
  $B = 2x^2 + 8x - x - 4$
  $B = 2x^2 + 7x - 4$
- Développer et réduire $C = (3x + 2)(3x - 2)$:
  $C = 3x \times 3x + 3x \times (-2) + 2 \times 3x + 2 \times (-2)$
  $C = 9x^2 - 6x + 6x - 4$
  $C = 9x^2 - 4$ (les termes en x s'annulent)

Exercice 6 *Double distributivité (4e)* Développer et réduire chaque expression :

a) $A = (x + 2)(x + 7)$ b) $B = (x - 3)(x + 4)$ c) $C = (2x + 1)(x - 5)$
d) $D = (3x - 2)(2x + 3)$ e) $E = (x + 6)(x - 6)$ f) $F = (4x - 1)(4x + 1)$

Factoriser par un facteur commun (4e)

Factoriser, c'est l'opération inverse de développer : on **met en facteur** un élément commun à tous les termes pour faire apparaître un produit.

Méthode :

1. Identifier le facteur commun à tous les termes (nombre, lettre, ou les deux) ;
2. écrire ce facteur devant une parenthèse ;
3. à l'intérieur de la parenthèse, écrire ce qui reste de chaque terme quand on le divise par le facteur commun.

Exemples

- $6x + 15 = 3(2x + 5)$ (facteur commun : 3, car $6 = 3 \times 2$ et $15 = 3 \times 5$).
- $x^2 + 4x = x(x + 4)$ (facteur commun : x, car $x^2 = x \times x$ et $4x = x \times 4$).
- $12x^2 - 8x = 4x(3x - 2)$ (facteur commun : $4x$, car $12x^2 = 4x \times 3x$ et $8x = 4x \times 2$).
- $5(x + 1) + x(x + 1) = (x + 1)(5 + x)$ (facteur commun : $(x + 1)$).

Vérification : on peut toujours vérifier en développant le résultat. Si on retrouve l'expression de départ, la factorisation est correcte.

Exercice 7 ***Factoriser (4^e)*** Factoriser chaque expression :

$A = 8x + 12$ $\quad B = 3x - 21$ $\quad C = x^2 + 7x$ $\quad D = 6x^2 - 9x$

$E = 10x^2 + 15x$ $\quad F = 4(x-3)+x(x-3)$ $\quad G = 2x(x+5)-3(x+5)$ $\quad H = x(2x+1)+(2x+1)$

Identités remarquables (3^e)

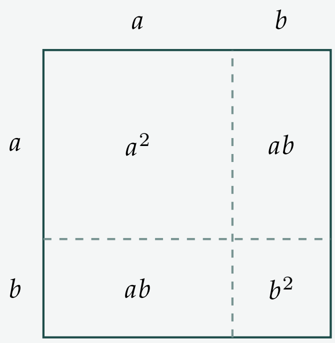
Les trois identités remarquables sont des formules de développement que l'on utilise dans **les deux sens** : pour développer (écrire sans parenthèses) et pour factoriser (remettre des parenthèses).

Pour tous nombres a et b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{(carré d'une somme)}$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad \text{(carré d'une différence)}$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \qquad \text{(produit somme-différence)}$$

*Comprendre : $(a+b)^2$ signifie $(a+b)(a+b)$, c'est-à-dire le produit de $(a+b)$ par lui-même. Ce n'est **pas** $a^2 + b^2$.*

Modèle du carré : l'aire du grand carré de côté $(a+b)$ est la somme des quatre aires.



$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Exemples

- $(x+3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$.
- $(2x-5)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$.
- $(x+4)(x-4) = x^2 - 4^2 = x^2 - 16$.
- $(3x+1)(3x-1) = (3x)^2 - 1^2 = 9x^2 - 1$.

Factoriser avec les identités remarquables (3^e)

Méthode : pour factoriser, il faut **reconnaître** la forme de l'identité dans l'expression développée.

Exemples

- $x^2 + 10x + 25$: on reconnaît $a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 5$ (car $25 = 5^2$ et $10x = 2 \times x \times 5$).
  Donc $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$.
- $9x^2 - 12x + 4$: on reconnaît $a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 3x$ et $b = 2$ (car $9x^2 = (3x)^2$, $4 = 2^2$ et $12x = 2 \times 3x \times 2$).
  Donc $9x^2 - 12x + 4 = (3x-2)^2$.
- $x^2 - 49$: on reconnaît $a^2 - b^2$ avec $a = x$ et $b = 7$ (car $49 = 7^2$).
  Donc $x^2 - 49 = (x+7)(x-7)$.
- $4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x+5)(2x-5)$.

Exercice 8 *Identités remarquables (3^e^)*

1. Développer et réduire en utilisant les identités remarquables :

$A = (x+4)^2$ $\quad B = (x-6)^2$ $\quad C = (3x+2)^2$

$D = (5x-1)^2$ $\quad E = (x+8)(x-8)$ $\quad F = (2x+7)(2x-7)$

2. Factoriser :

$G = x^2 + 8x + 16$ $\quad H = x^2 - 14x + 49$ $\quad I = x^2 - 36$

$J = 16x^2 - 9$ $\quad K = 4x^2 + 12x + 9$ $\quad L = 25x^2 - 40x + 16$

Simplifier une fraction littérale (3^e^)

Pour simplifier une fraction littérale, on **factorise** le numérateur (et éventuellement le dénominateur), puis on simplifie le facteur commun.

Attention : on ne simplifie **que des facteurs** (des termes qui multiplient), jamais des termes d'une somme. Par exemple, dans $\dfrac{x+3}{x}$, on ne peut pas simplifier x car x n'est pas facteur du numérateur entier.

Exemples

- $\dfrac{3x+6}{x+2}$: on factorise le numérateur : $3x+6 = 3(x+2)$.
  Donc $\dfrac{3x+6}{x+2} = \dfrac{3(x+2)}{x+2} = 3 \quad (\text{pour } x \neq -2)$.
- $\dfrac{x^2-9}{x-3}$: on reconnaît $a^2 - b^2$ au numérateur : $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$.
  Donc $\dfrac{x^2-9}{x-3} = \dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x+3 \quad (\text{pour } x \neq 3)$.
- $\dfrac{2x^2+4x}{2x}$: on factorise le numérateur : $2x^2 + 4x = 2x(x+2)$.
  Donc $\dfrac{2x^2+4x}{2x} = \dfrac{2x(x+2)}{2x} = x+2 \quad (\text{pour } x \neq 0)$.

La condition « pour $x \neq \dots$ » est indispensable : on ne peut pas diviser par zéro. La valeur interdite est celle qui annule le dénominateur.

Exercice 9 *Simplifier des fractions littérales (3^e^)* Factoriser le numérateur, puis simplifier. Préciser la valeur interdite.

1. $A = \dfrac{5x+10}{x+2}$
2. $B = \dfrac{x^2-4}{x+2}$
3. $C = \dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$
4. $D = \dfrac{4x^2-1}{2x-1}$

Erreurs classiques en calcul littéral

Erreur	Exemple faux	Correction
Concaténer au lieu de réduire	$3x + 5 = 8x$	$3x + 5$ ne se réduit pas ($3x$ et 5 ne sont pas de même nature)
Confondre $2x$ et x^2	$x + x = x^2$	$x + x = 2x$ (addition) ; $x \times x = x^2$ (multiplication)
Oublier de distribuer à tous les termes	$3(x + 4) = 3x + 4$	$3(x + 4) = 3x + 12$
Mauvais signe avec le −	$-(x - 3) = -x - 3$	$-(x - 3) = -x + 3$ (le − change les deux signes)
Croire que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$	$(x + 3)^2 = x^2 + 9$	$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ (il manque le double produit $2ab$)
Simplifier un quotient terme à terme	$\dfrac{x + 3}{x} = 3$	On ne peut pas simplifier x dans $\dfrac{x + 3}{x}$ (le x n'est pas facteur du numérateur entier)

Exercice 10 ***Programmes de calcul (4^e–3^e)*** Voici deux programmes de calcul :

Programme A	Programme B
Choisir un nombre.	Choisir un nombre.
Lui ajouter 3.	Lui soustraire 1.
Élever le résultat au carré.	Élever le résultat au carré.
	Ajouter 8 fois le nombre de départ.
	Ajouter 8.

1. Tester les deux programmes avec le nombre 2, puis avec le nombre -1.
2. On appelle x le nombre choisi au départ. Exprimer le résultat de chaque programme en fonction de x.
3. Développer et réduire les deux expressions obtenues. Que constate-t-on ?

Exercice 11 ***Vrai ou faux ?*** Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. $5x + 3 = 8x$ pour tout nombre x.
B. $2(x + 4) = 2x + 4$.
C. x^2 est toujours positif ou nul, quel que soit le nombre x.
D. $3x^2$ et $5x^2$ sont des termes de même nature.
E. $(x + 1)^2 = x^2 + 1$.
F. $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.
G. Si $x = 3$, alors $2x^2 = 36$.
H. $-(x - 5) = -x + 5$.

Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche ***Que faire quand je bloque ?***

Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche ***Mémorisation et sciences cognitives****.*
Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton ***Carnet d'erreurs****.*

SOLUTIONS DES EXERCICES

Corrigé de l'exercice 1.

1. $A = 4 \times x + 3 = 4x + 3$ (on supprime le $\times$ devant x).
2. $B = 1 \times y - 7 = y - 7$ (le coefficient 1 ne s'écrit pas).
3. $C = x \times 5 + x \times x = 5x + x^2$ (le nombre avant la lettre ; $x \times x = x^2$).
4. $D = -1 \times a + 3 \times b \times 2 = -a + 6b$ $(-1 \times a = -a\,;\, 3 \times 2 = 6)$.
5. $E = 7 \times (y + 2) - 1 \times y = 7(y + 2) - y$ (on supprime le $\times$ devant la parenthèse ; $1 \times y = y$).
6. $F = a \times a \times a + 2 \times a \times b = a^3 + 2ab$ $(a \times a \times a = a^3)$.

Corrigé de l'exercice 2.

1. Pour $x = 3$:
   a) $A = 5 \times 3 - 7 = 15 - 7 = 8$.
   b) $B = 3^2 + 2 \times 3 = 9 + 6 = 15$.
   c) $C = 4(3 + 1) - 3 \times 3 = 4 \times 4 - 9 = 16 - 9 = 7$.
2. Pour $x = -2$:
   a) $D = 3 \times (-2) + 10 = -6 + 10 = 4$.
   b) $E = (-2)^2 - 4 \times (-2) = 4 - (-8) = 4 + 8 = 12$.
   c) $F = 2 \times (-2)^2 + (-2) - 5 = 2 \times 4 - 2 - 5 = 8 - 2 - 5 = 1$.
3. On calcule le membre de gauche pour $x = 5$: $2 \times 5 - 3 = 10 - 3 = 7$. Le membre de droite vaut 7. On obtient bien $7 = 7$, donc $x = 5$ est solution de l'équation.

Corrigé de l'exercice 3.

1. $A = 5x + 3x - 2 = (5 + 3)x - 2 = 8x - 2$.
2. $B = 7a - 3a + 2a = (7 - 3 + 2)a = 6a$.
3. $C = 4x - 9 + 3x + 5 = (4 + 3)x + (-9 + 5) = 7x - 4$.
4. $D = 6y + 3 - 8y - 7 = (6 - 8)y + (3 - 7) = -2y - 4$.
5. $E = 2x^2 + 5x - x^2 + 3x - 4 = (2 - 1)x^2 + (5 + 3)x - 4 = x^2 + 8x - 4$.
6. $F = 3a + 2b - 5a + 4b + 1 = (3 - 5)a + (2 + 4)b + 1 = -2a + 6b + 1$.
7. $G = x^2 + x + 1 - 2x^2 + 3x - 5 = (1 - 2)x^2 + (1 + 3)x + (1 - 5) = -x^2 + 4x - 4$.
8. $H = 5xy - 3x + 2xy + x = (5 + 2)xy + (-3 + 1)x = 7xy - 2x$.

Corrigé de l'exercice 4.

1. $A = 4(x + 2) = 4 \times x + 4 \times 2 = 4x + 8$.
2. $B = 3(5x - 1) = 3 \times 5x - 3 \times 1 = 15x - 3$.
3. $C = -2(3x + 4) = -2 \times 3x + (-2) \times 4 = -6x - 8$.
4. $D = -(x - 9) = -x + 9$ (distribuer -1 change les signes de chaque terme).
5. $E = x(2x + 7) = x \times 2x + x \times 7 = 2x^2 + 7x$.
6. $F = -3x(x - 5) = -3x \times x - (-3x) \times 5 = -3x^2 + 15x$.

Corrigé de l'exercice 5.

1. $A = 2(x + 4) + 3(x - 1)$:

$$A = 2x + 8 + 3x - 3 \qquad \text{(on développe)}$$
$$A = (2 + 3)x + (8 - 3) = 5x + 5 \qquad \text{(on réduit)}$$

2. $B = 5(2x - 3) - 4(x + 2)$:

$$B = 10x - 15 - 4x - 8 \qquad \text{(on développe)}$$
$$B = (10 - 4)x + (-15 - 8) = 6x - 23 \qquad \text{(on réduit)}$$

3. $C = 7(x + 1) - (3x - 5)$:

$$C = 7x + 7 - 3x + 5 \qquad \text{(on développe ; distribuer } -1 \text{ change les signes)}$$
$$C = (7 - 3)x + (7 + 5) = 4x + 12 \qquad \text{(on réduit)}$$

4. $D = x(x + 6) - 3(x - 2)$:

$$D = x^2 + 6x - 3x + 6 \qquad \text{(on développe)}$$
$$D = x^2 + (6 - 3)x + 6 = x^2 + 3x + 6 \qquad \text{(on réduit)}$$

5. $E = 2x(x - 4) + x(3x + 1)$:

$$E = 2x^2 - 8x + 3x^2 + x \qquad \text{(on développe)}$$
$$E = (2 + 3)x^2 + (-8 + 1)x = 5x^2 - 7x \qquad \text{(on réduit)}$$

6. $F = (5x + 1) - (2x - 3) + 4(x + 2)$:

$$F = 5x + 1 - 2x + 3 + 4x + 8 \qquad \text{(on développe)}$$
$$F = (5 - 2 + 4)x + (1 + 3 + 8) = 7x + 12 \qquad \text{(on réduit)}$$

Corrigé de l'exercice 6.

1. $A = (x + 2)(x + 7)$:

$$A = x \times x + x \times 7 + 2 \times x + 2 \times 7$$
$$A = x^2 + 7x + 2x + 14$$
$$A = x^2 + 9x + 14$$

2. $B = (x - 3)(x + 4)$:

$$B = x \times x + x \times 4 + (-3) \times x + (-3) \times 4$$
$$B = x^2 + 4x - 3x - 12$$
$$B = x^2 + x - 12$$

3. $C = (2x + 1)(x - 5)$:

$$C = 2x \times x + 2x \times (-5) + 1 \times x + 1 \times (-5)$$
$$C = 2x^2 - 10x + x - 5$$
$$C = 2x^2 - 9x - 5$$

4. $D = (3x - 2)(2x + 3)$:

$$D = 3x \times 2x + 3x \times 3 + (-2) \times 2x + (-2) \times 3$$
$$D = 6x^2 + 9x - 4x - 6$$
$$D = 6x^2 + 5x - 6$$

5. $E = (x + 6)(x - 6)$:

$$E = x^2 - 6x + 6x - 36$$
$$E = x^2 - 36$$

6. $F = (4x - 1)(4x + 1)$:

$$F = 16x^2 + 4x - 4x - 1$$
$$F = 16x^2 - 1$$

Corrigé de l'exercice 7.

1. $A = 8x + 12 = 4(2x + 3)$ (facteur commun : 4).
   Vérification : $4(2x + 3) = 8x + 12$. ✓
2. $B = 3x - 21 = 3(x - 7)$ (facteur commun : 3).
   Vérification : $3(x - 7) = 3x - 21$. ✓
3. $C = x^2 + 7x = x(x + 7)$ (facteur commun : x).
   Vérification : $x(x + 7) = x^2 + 7x$. ✓
4. $D = 6x^2 - 9x = 3x(2x - 3)$ (facteur commun : $3x$).
   Vérification : $3x(2x - 3) = 6x^2 - 9x$. ✓
5. $E = 10x^2 + 15x = 5x(2x + 3)$ (facteur commun : $5x$).
   Vérification : $5x(2x + 3) = 10x^2 + 15x$. ✓
6. $F = 4(x - 3) + x(x - 3) = (x - 3)(4 + x)$ (facteur commun : $(x - 3)$).
   Vérification : $(x-3)(4+x) = 4x + x^2 - 12 - 3x = x^2 + x - 12$. Et $4(x-3) + x(x-3) = 4x - 12 + x^2 - 3x = x^2 + x - 12$.
   ✓
7. $G = 2x(x + 5) - 3(x + 5) = (x + 5)(2x - 3)$ (facteur commun : $(x + 5)$).
   Vérification : $(x + 5)(2x - 3) = 2x^2 - 3x + 10x - 15 = 2x^2 + 7x - 15$. ✓
8. $H = x(2x + 1) + (2x + 1) = (2x + 1)(x + 1)$ (facteur commun : $(2x + 1)$; le deuxième terme est $1 \times (2x + 1)$).
   Vérification : $(2x + 1)(x + 1) = 2x^2 + 2x + x + 1 = 2x^2 + 3x + 1$. ✓

Corrigé de l'exercice 8.

1. Développements :
   a) $A = (x + 4)^2 = x^2 + 2 \times x \times 4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$.
   b) $B = (x - 6)^2 = x^2 - 2 \times x \times 6 + 6^2 = x^2 - 12x + 36$.
   c) $C = (3x + 2)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$.
   d) $D = (5x - 1)^2 = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 1 + 1^2 = 25x^2 - 10x + 1$.
   e) $E = (x + 8)(x - 8) = x^2 - 8^2 = x^2 - 64$.
   f) $F = (2x + 7)(2x - 7) = (2x)^2 - 7^2 = 4x^2 - 49$.
2. Factorisations :
   a) $G = x^2 + 8x + 16$: on reconnaît $(a + b)^2$ avec $a = x$ et $b = 4$ (car $16 = 4^2$ et $8x = 2 \times x \times 4$).
      $G = (x + 4)^2$.
   b) $H = x^2 - 14x + 49$: on reconnaît $(a - b)^2$ avec $a = x$ et $b = 7$ (car $49 = 7^2$ et $14x = 2 \times x \times 7$).
      $H = (x - 7)^2$.

c) $I = x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x+6)(x-6)$.

d) $J = 16x^2 - 9 = (4x)^2 - 3^2 = (4x+3)(4x-3)$.

e) $K = 4x^2 + 12x + 9$: on reconnaît $(a+b)^2$ avec $a = 2x$ et $b = 3$ (car $4x^2 = (2x)^2$, $9 = 3^2$ et $12x = 2 \times 2x \times 3$). $K = (2x+3)^2$.

f) $L = 25x^2 - 40x + 16$: on reconnaît $(a-b)^2$ avec $a = 5x$ et $b = 4$ (car $25x^2 = (5x)^2$, $16 = 4^2$ et $40x = 2 \times 5x \times 4$). $L = (5x-4)^2$.

Corrigé de l'exercice 9.

1. On factorise le numérateur : $5x + 10 = 5(x+2)$.

$$A = \frac{5(x+2)}{x+2} = 5 \qquad (x \neq -2)$$

2. On reconnaît $a^2 - b^2$ au numérateur : $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$.

$$B = \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = x - 2 \qquad (x \neq -2)$$

3. On reconnaît $(a-b)^2$ au numérateur : $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

$$C = \frac{(x-3)^2}{x-3} = x - 3 \qquad (x \neq 3)$$

4. On reconnaît $a^2 - b^2$ au numérateur : $4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x+1)(2x-1)$.

$$D = \frac{(2x+1)(2x-1)}{2x-1} = 2x + 1 \qquad \left(x \neq \frac{1}{2}\right)$$

Corrigé de l'exercice 10.

1. Tests numériques :
   Pour $x = 2$:
   - Programme A : $2 \longrightarrow 2 + 3 = 5 \longrightarrow 5^2 = 25$.
   - Programme B : $2 \longrightarrow 2 - 1 = 1 \longrightarrow 1^2 = 1 \longrightarrow 1 + 8 \times 2 = 17 \longrightarrow 17 + 8 = 25$.

   Pour $x = -1$:
   - Programme A : $-1 \longrightarrow -1 + 3 = 2 \longrightarrow 2^2 = 4$.
   - Programme B : $-1 \longrightarrow -1 - 1 = -2 \longrightarrow (-2)^2 = 4 \longrightarrow 4 + 8 \times (-1) = -4 \longrightarrow -4 + 8 = 4$.

   On obtient le même résultat dans les deux cas.
2. En fonction de x :
   - Programme A : $(x+3)^2$.
   - Programme B : $(x-1)^2 + 8x + 8$.
3. Développement :
   - Programme A : $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$.
   - Programme B : $(x-1)^2 + 8x + 8 = x^2 - 2x + 1 + 8x + 8 = x^2 + 6x + 9$.

   Les deux programmes donnent la même expression $x^2 + 6x + 9$. Ils produisent donc toujours le même résultat, quel que soit le nombre de départ. Le calcul littéral permet de le prouver, alors que les tests numériques ne le prouvaient que pour des cas particuliers.

Corrigé de l'exercice 11.

- **A. Faux.** $5x + 3$ ne peut pas se réduire car $5x$ et 3 ne sont pas de même nature. Pour $x = 1$: $5 \times 1 + 3 = 8$ mais $8 \times 1 = 8$, cela semble marcher ; mais pour $x = 2$: $5 \times 2 + 3 = 13$ et $8 \times 2 = 16 \neq 13$. L'erreur consiste à additionner le coefficient et le terme constant ($5 + 3 = 8$).
- **B. Faux.** $2(x + 4) = 2x + 8$ (on distribue le 2 aux **deux** termes). L'erreur consiste à oublier de distribuer au second terme.
- **C. Vrai.** Le carré de tout nombre réel est positif ou nul : si $x \geq 0$ alors $x^2 \geq 0$, et si $x < 0$ alors $x^2 > 0$. Et $0^2 = 0$.
- **D. Vrai.** $3x^2$ et $5x^2$ ont la même partie littérale (x^2), on peut donc les additionner : $3x^2 + 5x^2 = 8x^2$.
- **E. Faux.** $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$, pas $x^2 + 1$. Il manque le double produit $2 \times x \times 1 = 2x$. Contre-exemple : pour $x = 2$, $(2 + 1)^2 = 9$ mais $2^2 + 1 = 5$.
- **F. Vrai.** C'est l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec $a = x$ et $b = 3$.
  Vérification : $(x - 3)(x + 3) = x^2 + 3x - 3x - 9 = x^2 - 9$. ✓
- **G. Faux.** $2x^2 = 2 \times x^2 = 2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$, pas 36. L'erreur vient de la confusion $(2x)^2 = (2 \times 3)^2 = 6^2 = 36$ avec $2x^2 = 2 \times 3^2 = 18$. Le carré porte uniquement sur x, pas sur $2x$.
- **H. Vrai.** Distribuer le signe – (c'est-à-dire -1) change le signe de chaque terme dans la parenthèse : $-(x-5) = -x+5$.